Einführung in die Funktionalanalysis

Bernhard Gsell
Skriptum zur Vorlesung
gelesen von
Prof. Wolfgang Woess
Sommersemester 2014

10. Mai 2015

Dies ist die Umsetzung meiner Vorlesungsmitschrift zu Einführung in die Funktionalanalysis, gehalten im Sommersemester 2014 von Professor Woess an der TU Graz, in LaTeX. Es beinhaltet grundsätzlich den gesamten Vorlesungsinhalt in leicht abgeänderter Reihenfolge sowie ein paar Ergänzungen meinerseits.

Es besteht keine hundertprozentige Garantie auf Richtigkeit oder Vollständigkeit des Skriptums!

Fragen, Wünsche, Fehler gefunden? Bitte eine E-Mail an: *bernhard.gsell@student.tugraz.at*

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

Definition 1
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ Teilmenge der Potenzmenge von X. Gelten folgende Eigenschaften:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$

(2) $U, V \in \mathcal{T} \;\to\; U \cap V \in \mathcal{T}$

(3) $U_i \in \mathcal{T}$ (für $i \in I$) $\;\to\; \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ (wobei I beliebige Menge ist)

Dann heißt $\mathcal{T}$ **Topologie** auf X. Das Tupel $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**.

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **offen**, falls $M \in \mathcal{T}$. Sie heißt **abgeschlossen**, falls $M^C := X \backslash M$ offen ist.

Für ein $x \in X$ heißt $U \in \mathcal{T}$ **offene Umgebung** von x, falls $x \in U$.

Eine Topologie ist also eine einfache Auswahl an Teilmengen von X, die wir als offen bezeichnen.

Dabei soll gelten: Die gesamte Menge X und die leere Menge $\emptyset$ sind offen, endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen und beliebige Vereinigungen (auch überabzählbare) offener Mengen sind offen.

Beispiel 1
Folgende Tupel sind topologische Räume:

- X beliebig, $(X, \mathcal{P}(X))$ diskrete Topologie (alle Teilmengen sind offen, größtmöglicher topologischer Raum)
- X beliebig, $(X, \{\emptyset, X\})$ indiskrete Topologie (kleinstmöglicher topologischer Raum)
- $X = \{0, 1\},\ \mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ Sierpinski-Raum
- $X = \mathbb{N},\ \mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A^C \text{ ist endlich } \} \cup \{\emptyset\}$ Kofinite Topologie

Definition 2
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X und sei $\tilde{x} \in X$. Gelte:

$\forall U \in \mathcal{T}(\text{mit } \tilde{x} \in U)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ x_n \in U$

Dann heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergent** gegen $\tilde{x}$.

In Worten ausgedrückt: Eine Folge konvergiert gegen den Wert $\tilde{x}$, falls in jeder offenen Umgebung von $\tilde{x}$ fast alle (also alle bis auf endlich viele Ausnahmen) Folgenglieder enthalten sind. In allgemeinen topologischen Räumen kann dieser Konvergenzbegriff seltsame Formen annehmen:

Beispiel 2
Wir betrachten eine beliebige Menge X und überlegen uns, wann eine Folge in der diskreten Topologie $(X, \mathcal{P}(X))$ konvergiert.

Für ein beliebiges $x \in X$ ist $\{x\}$ eine offene Umgebung von x. Für eine Folge, die gegen x konvergiert, muss also gelten, dass fast alle Folgenglieder in dieser Umgebung enthalten sind. Dabei besteht diese Umgebung nur aus dem Element x selbst, es müssen also fast alle Folgenglieder konstant x sein.

Die einzigen Folgen, die somit in diesem Raum konvergieren, sind jene, die bis auf endlich viele Folgenglieder konstant sind.

Beispiel 3 (*)
Wir betrachten eine beliebige Menge X und überlegen uns, wann eine Folge in der indiskreten Topologie $(X, \{X, \emptyset\})$ konvergiert.

Betrachten wir eine beliebige Folge und einen beliebigen Wert x, so ist die einzige offene Umgebung von x die gesamte Menge X selbst. Trivialerweise sind fast alle (genauer gesagt tatsächlich alle) Folgenglieder in dieser offenen Umgebung enthalten. Dies erfüllt genau die Definition der Konvergenz.

In diesem Raum konvergiert also jede beliebige Folge gegen jeden beliebigen Wert. Insbesondere muss der Grenzwert einer konvergenten Folge nicht eindeutig bestimmt sein.

Definition 3
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $A \subset X$.

- $a \in A$ heißt **innerer Punkt** von A $:\Leftrightarrow$
  $\exists U \in \mathcal{T}$ mit $a \in U: \ U \subset A$
- $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A $:\Leftrightarrow$
  $\forall U \in \mathcal{T}$ (mit $x \in U$) $: \ U \cap A \neq \emptyset$
- $\mathring{A} = Int(A) := \{a \in A \mid a \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A
- $Ext(A) := Int(A^C)$ heißt das **Äußere** von A
- $\overline{A} := (Ext(A))^C = (Int(A^C))^C$ heißt der **Abschluss** von A

Korollar 1
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Es gilt:

- A ist offen $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$
- A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{A} = A$
- $\mathring{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A
- $\overline{A}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von A

Definition 4
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann heißt die Menge

$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A} = (Int(A) \cup Ext(A))^C$

der **Rand** von A.

Definition 5
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Seien $A, B \subset X$

- A heißt **dicht in** B, falls $B \subset \overline{A}$.
- A heißt **dicht** (bezüglich des topologischen Raumes), falls $\overline{A} = X$.
- A heißt **nirgends dicht**, falls $Ext(A)$ dicht ist.
- X heißt **separabel**, falls eine abzählbare dichte Menge existiert.

Korollar 2 (*)
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, seien $A, B \subset X$. Es gilt:

A liegt dicht in $B \Leftrightarrow \ \forall b \in B \ \forall U \in X$ (mit $b \in U$) $: \ U \cap A \neq \emptyset$

In Worten: A liegt dicht in B, falls jeder Punkt von B Berührungspunkt von A ist.

Beweis. Wir formulieren die Definition um:
$\overline{A} \supset B \ \Leftrightarrow \ (Int(A^C))^C \supset B \ \Leftrightarrow \ Int(A^C) \subset B^C \ \Leftrightarrow$
Alle inneren Punkte von A^C liegen in $B^C \ \Leftrightarrow$
Kein innerer Punkt von A^C liegt in $B \ \Leftrightarrow$
$\forall b \in B \ : \ b$ ist nicht innerer Punkt von $A^C \ \Leftrightarrow$
$\forall b \in B \ \forall U \in \mathcal{T}$ (mit $b \in U$) $: \ \neg(U \subset A^C) \ \Leftrightarrow$
$\forall b \in B \ \forall U \in \mathcal{T}$ (mit $b \in U$) $: \ U \cap A \neq \emptyset$

□

Lemma 1
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, sei $A \subset X$. Es gilt:
A ist nirgends dicht $\Leftrightarrow \mathring{\overline{A}} = \emptyset$.
In Worten: Die Menge ist nirgends dicht, genau dann wenn das Innere ihres Abschlusses leer ist.

Beweis. $X = \overline{Ext(A)} = \overline{Int(A^C)} = \overline{(\overline{A})^C} = (Int((\overline{A}^C)^C))^C = (Int(\overline{A}))^C = (\mathring{\overline{A}})^C \Leftrightarrow \mathring{\overline{A}} = \emptyset$ □

Definition 6
Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelte:
$\forall U \in \mathcal{T}_Y \;:\; f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$
Dann heißt f **stetig**.

In Worten: f ist stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind.

Definition 7
Wir legen folgende Klassifizierungen für topologische Räume fest. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Dieser heißt

- T_0 oder auch **Kolmogorov-Raum**, falls:
  $\forall x, y \in X (\text{mit } x \neq y) \; \exists U \in \mathcal{T} : \; (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$
- T_1-Raum, falls:
  $\forall x, y \in X (\text{mit } x \neq y) \; \exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; x \in U \wedge x \notin V \wedge y \notin U \wedge y \in V$
- T_2 oder auch **Hausdorff-Raum**, falls:
  $\forall x, y \in X (\text{mit } x \neq y) \; \exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; x \in U \;\wedge\; y \in V \;\wedge\; U \cap V = \emptyset$
- $T_{2\frac{1}{2}}$ oder auch **Urysohn-Raum**, falls:
  $\forall x, y \in X (\text{mit } x \neq y) \; \exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; x \in U \;\wedge\; y \in V \;\wedge\; \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$
- T_3 -Raum oder auch **regulärer Raum**, falls:
  $\forall F \subset X$ abgeschlossen $\forall y \in X \backslash F \; \exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; F \subset U \;\wedge\; y \in V \;\wedge\; U \cap V = \emptyset$
- $T_{3\frac{1}{2}}$ oder auch **Tilchonovraum**, falls:
  $\forall F \subset X$ abgeschlossen $\forall y \in X \backslash F \; \exists f : X \to [0, 1]$ stetig $: \; f|_F = 0 \;\wedge\; f(y) = 1$
- T_4-Raum oder auch **normaler Raum**, falls:
  $\forall F, G \subset X$ (mit F, G abgeschlossen und $F \cap G = \emptyset$) $\exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; F \subset U \;\wedge\; G \subset V \;\wedge\; U \cap V = \emptyset$

Diese Räume sind jeweils Spezialfälle der in der Liste darüberstehenden Räume, also: Jeder T_4-Raum ist auch $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, jeder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist auch T_3-Raum und so weiter.

Korollar 3
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum. Dann ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

Beweis. Indirekt. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X und seien $x, y \in X$, $x \neq y$ Grenzwerte dieser Folge. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff-Raum ist, gilt:
$\exists U, V \in \mathcal{T} \;:\; U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ und $y \in V$.
Nach Definition der Konvergenz sollen fast alle Folgenglieder x_n sowohl in U, als auch in V liegen, was nicht möglich ist, da die beiden Mengen disjunkt sind. Widerspruch! □

2 Metrische Räume

Definition 8
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Gelten folgende Eigenschaften:

(1) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \land (d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y)$ (Positivität)

(2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(3) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt die Funktion d **Metrik** auf X und das Tupel (X, d) heißt **metrischer Raum**.

Ein metrischer Raum ist in Worten beschrieben eine Menge, auf der ein Abstandsbegriff eingeführt wird, dh. je zwei Elementen der Menge wird eine nichtnegative reelle Zahl als Abstand zugeordnet.

Man beachte, dass eine Menge X alleine kein metrischer Raum ist, da eine Metrik d dazu angegeben werden muss. Dennoch ist es üblich, vom metrischen Raum X zu sprechen, falls sich die zugehörige Metrik aus dem Kontext ergibt.

Definition 9
Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $\phi : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Gelte:

$\forall x, y \in X : d_X(x, y) = d_Y(\phi(x), \phi(y))$

Dann heißt ϕ **isometrische Bijektion** und die Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen **isomorph**.

Beispiel 4
Mit $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$ ist (X, d) metrischer Raum.

Beispiel 5
Sei $X = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für $x = (x_1, ...x_n)^T, y = (y_1, ...y_n)^T \in X$ legen wir fest:

- $d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (wobei $1 \leq p < \infty$) ist die durch die p-Norm induzierte Metrik
- $d_\infty(x, y) = \max_{k=1,...n} \{|x_k - y_k|\}$ ist die durch die Maximumsnorm bzw. ∞-Norm induzierte Metrik

Diese Funktionen sind wohldefinierte Metriken auf X, da sie durch Normen induziert werden (siehe später). Die erforderlichen Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen, lediglich die Dreiecksungleichung der p-Norm bedarf einer ausführlicheren Behandlung (Stichwort Minkowski-Ungleichung).

Definition 10
Sei (X, d) metrischer Raum. Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren:

- $B(x_0, \epsilon) := \{y \in X \mid d(y, x_0) < \epsilon\}$ heißt die **offene Kugel** mit Mittelpunkt x_0 und Radius ϵ.
- $\overline{B}(x_0, \epsilon) := \{y \in X \mid d(y, x_0) \leq \epsilon\}$ heißt die **abgeschlossene Kugel** mit Mittelpunkt x_0 und Radius ϵ.

Definition 11
In einem metrischen Raum (X, d) heißt eine Menge $U \subset X$ **offen**, falls gilt:

$\forall u \in U \; \exists \epsilon > 0 : \; B(u, \epsilon) \subset U$

Es lässt sich leicht zeigen, dass im metrischen Raum die wie oben definierten offenen Kugeln tatsächlich offen sind und die Menge der offenen Mengen eine Topologie bilden. Eine Metrik induziert also eine Topologie auf der Menge X. Dementsprechend lassen sich alle Begriffe, die wir für topologische Räume definiert haben, auch auf metrische Räume übertragen (beispielsweise die Definition der Konvergenz einer Folge).

Jeder metrische Raum ist mindestens T_2- bzw. Hausdorff-Raum. Das heißt insbesondere, dass T_0 und

T_1-Räume, die keine T_2-Räume sind, nicht durch eine Metrik induziert werden können.

Beispiel 6
Wir betrachten als metrischen Raum die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der gewöhnlichen Betragsmetrik $d(x,y) = |x-y|$. Die Menge $M =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, die offen und zugleich abgeschlossen ist. Offenheit und Abgeschlossenheit schließen sich also nicht einander aus.

Definition 12
Sei (X,d) metrischer Raum.

- Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Gelte:

  $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon$

  Dann heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy-Folge**.
- Der Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge von X konvergiert.

Korollar 4 (*)
Für einen metrischen Raum gilt folgendes:

(1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(2) Jede konvergente Folge ist auch Cauchy-Folge.

(3) Ist der metrische Raum vollständig, so ist eine Folge konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (1). Folgt daraus, dass metrische Räume Hausdorff-Räume sind.

(2). Gelte $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt :
$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) \to 0$ falls $n, m \to \infty$

(3). Folgt aus der Definition der Vollständigkeit und dem vorherigen Korollar.

□

Satz 1 (*)
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig.

(2) $\forall x_0 \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \; : \; d_X(x, x_0) < \delta \; \Rightarrow \; d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ (Epsilon-Delta-Kriterium)

(3) $x_n \to x_0 \; \Rightarrow \; f(x_n) \to f(x_0)$ (Folgen-Kriterium)

Satz 2 (*)
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann gilt:

A ist abgeschlossen $\Rightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ konvergent in X mit Grenzwert $\overline{x} \in X \; : \; \overline{x} \in A$.

Falls es sich um einen metrischen Raum handelt, gilt auch die Umkehrung.

Beweis. "$\Rightarrow$".
Indirekt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit einem Grenzwert $\overline{x} \notin A$. Also $\overline{x} \in A^C$.
Laut Annahme ist A abgeschlossen, also A^C offen. A^C ist somit offene Umgebung von $\overline{x}$.
Nach Definition der Konvergenz liegen fast alle x_n in dieser offenen Umgebung des Grenzwertes: $\exists n \in \mathbb{N} \; : \; x_n \in A^C$, also $x_n \notin A$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass die gesamte Folge in A liegt.

Falls $(X, \mathcal{T})$ durch eine Metrik induziert wird: "$\Leftarrow$".
Wir nehmen an, dass A nicht abgeschlossen, daher A^C nicht offen ist. Es gibt also ein $\overline{x} \in A^C$ so dass

jede offene Kugel um $\overline{x}$ keine Teilmenge von A^C ist:
$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ B(x, \frac{1}{n}) \not\subset A^C$
$\Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Diese Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt nach Konstruktion ganz in A und konvergiert gegen $\overline{x}$, welches nicht in A liegt.
Falls A also nicht abgeschlossen ist, finden wir eine Folge in A, deren Grenzwert nicht in A liegt. Das Umkehren dieser Implikation liefert die Behauptung. □

Die Umkehrung im obigen Satz gilt im Allgemeinen nicht für alle topologischen Räume (sie gilt aber allgemeiner für jene topologischen Räume, die das sogenannte erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen).

Korollar 5
Sei (X, d) metrischer Raum. Sei $A \subset X$.

$x \in X$ ist Berührungspunkt von $A \ \Leftrightarrow \ \forall r > 0 : \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Dies ist eine bloße Umformulierung der Definition von Berührungspunkten speziell für metrische Räume.

Definition 13
Sei (X, d) metrischer Raum. Sei $A \subset X$.

- $a \in A$ heißt **isolierter Punkt** in A $:\Leftrightarrow$
  $\exists r > 0 \ : \ B(a, r) \cap A = \{a\}$
- $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** in A $:\Leftrightarrow$
  $\forall r > 0 \ : \ (B(a, r) \cap A)\backslash\{a\} \neq \emptyset$

Anders formuliert ist ein Häufungspunkt ein nicht isolierter Berührungspunkt.

Beispiel 7 (*)
Es sei $X = \{a, b\}$ gegeben. Auf dieser Menge sei die Metrik
$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$
definiert. Wir bilden den Abschluss der offenen Einheitskugel von a mit Radius 1: $B(a, 1) = \{a\}$. Da in dieser Metrik die Menge $\{a\}$ abgeschlossen ist, ist sie gleich dem Abschluss:
$\overline{B(a, 1)} = \overline{\{a\}} = \{a\}$
Dem gegenüber steht die abgeschlossene Einheitskugel:
$\overline{B}(a, 1) = \{a, b\}$
Im Allgemeinen stimmen also in metrischen Räumen die abgeschlossene Kugel und der Abschluss der offenen Kugel nicht überein.

Beispiel 8
Wir bilden den Rand einiger Mengen:

- Sei $X = \mathbb{R}, \ x \in X, \ A = \{x\}$. Es sind:
  $\mathring{A} = \emptyset$ und $\overline{A} = \{x\}$, damit also : $\partial A = \{x\}\backslash\emptyset = A$
  Der Rand einer reellen Zahl ist somit sie selbst.
- Sei wieder $X = \mathbb{R}$ und nun $A = \mathbb{Q}$. Es sind:
  $\mathring{A} = \emptyset$ und $\overline{A} = \mathbb{R}$, also $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
  Der Rand von $\mathbb{Q}$ ist also $\mathbb{R}$.
- Sei $X = \mathbb{Q}, \ A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$. Da A offen und abgeschlossen ist, gilt: $\partial A = A\backslash A = \emptyset$.
  Der Rand dieser Menge ist also leer.

Die Vollständigkeit eines metrischen Raumes ist eine starke und praktische Eigenschaft, auf die man nicht verzichten will. Falls ein metrischer Raum nicht vollständig ist, kann man, frei nach dem Motto "Was man nicht hat, das konstruiert man sich" folgende Methode verwenden, um aus diesen einen vollständigen

Raum zu konstruieren.

Definition 14
Seien $(X,d),(\tilde{X},\tilde{d})$ metrische Räume. Gelten folgende Eigenschaften:

(1) $\exists\phi : X \to \tilde{X}\ \forall x,y \in X : d(x,y) = \tilde{d}(\phi(x),\phi(y))$ (ϕ heißt isometrische Einbettung)

(2) $\phi(X)$ liegt dicht in $\tilde{X}$,daher $\forall\tilde{x} \in \tilde{X}\ \exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : \phi(x_n) \to \tilde{x}$

(3) $(\tilde{X},\tilde{d})$ ist vollständig

Dann heißt $(\tilde{X},\tilde{d})$ **Vervollständigung** des Raumes (X,d).

Satz 3
Jeder metrische Raum besitzt eine Vervollständigung.

Beweis. Es sei (X,d) metrischer Raum. Wir konstruieren eine Vervollständigung. Hinweis zur Notation: Wir schreiben kurz $(x_n) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für Folgen, falls der Folgenindex offensichtlich ist.
Es sei $\mathcal{C} = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ ist Cauchy-Folge}\}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in X.

Weiters sei nun eine Äquivalenzrelation definiert:
$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$ und $[(x_n)] = \{(y_n) \in \mathcal{C} \mid (x_n) \sim (y_n)\}$

Wir bilden $\tilde{X} = \mathcal{C}|_{\sim}$ die Menge aller Äquivalenzklassen und definieren als Metrik:
$\tilde{d}\,([(x_n)],[(y_n)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

In Worten ausgedrückt betrachten wir hier zwei Cauchy-Folgen als äquivalent, falls der Abstand ihrer Glieder beliebig klein wird, also die Glieder beider Folgen sich immer weiter annähern.

Weiters definieren wir als gewünschte isometrische Einbettung jene Funktion, die jeden Wert aus X auf seine konstante Folge abbildet: $\phi(x) = (x)_{n\in\mathbb{N}}$ (für $x \in X$).

Damit bildet $(\tilde{X},\tilde{d})$ eine Vervollständigung.

Zur Rechtfertigung sind nun nicht nur die Eigenschaften der Vervollständigung nachzuweisen, sondern es ist auch sicher zu stellen, dass die definierten Objekte tatsächlich wohldefiniert sind:

(i) $\sim$ ist Äquivalenzrelation

(ii) $\tilde{d}$ ist eine wohldefinierte Funktion ($\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ existiert für Cauchy-Folgen und $\tilde{d}$ ist unabhängig vom Repräsentanten)

(iii) $\tilde{d}$ ist Metrik auf $\tilde{X}$

und anschließend: $(\tilde{X},\tilde{d})$ ist Vervollständigung von (X,d) (insbesondere ist die Funktion ϕ tatsächlich eine isometrische Einbettung wie behauptet).

(i) ist einfach zu zeigen

(ii) Die Verwendung der gewöhnlichen und umgekehrten Dreiecksungleichung ergibt:
$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| = |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m) + d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)|$
$\leq |d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m)| + |d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)| \leq d(y_n,y_m) + d(x_n,x_m) \to 0.$

Damit ist $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent.

Seien $(x_n) \sim (\tilde{x}_n)$ und $(y_n) \sim (\tilde{y}_n)$.
$|d(x_n,y_n) - d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x_n,\tilde{y}_n)| + |d(x_n,\tilde{y}_n) - d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)| \leq |d(y_n,\tilde{y}_n) - d(x_n,\tilde{x}_n)| \to 0$

Somit ist
$\tilde{d}([(x_n)],[(y_n)]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \tilde{d}([(\tilde{x}_n)],[(\tilde{y}_n)])$
und $\tilde{d}$ unabhängig von den Repräsentanten ihrer Klassen.

(iii) Folgt aus der Definition von $\tilde{d}$ und aus den Grenzwertsätzen.

Nun zeigen wir, dass $(\tilde{X}, \tilde{d})$ die drei Punkte der Definition der Vervollständigung erfüllen.

(1) Mit der oben beschriebenen Abbildung ϕ gilt für $x, y \in X$ trivialerweise:
$\tilde{d}(\phi(x), \phi(y)) = \tilde{d}((x)_{n\in\mathbb{N}}, (y)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$
ϕ ist also eine isometrische Einbettung.

(2) Sei $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{X}$ gegeben. Ebenjener Repräsentant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser Klasse ist eine Cauchy-Folge in X. Es gilt also: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{d}(\phi(x_n), [(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} d(x_n, x_k) = 0$. Damit liegt $\phi(X)$ dicht in $\tilde{X}$.

(3) Wir wollen zeigen, dass $(\tilde{X}, \tilde{d})$ vollständig ist. Sei also $[(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\tilde{X}$. Man beachte, dass es sich hier um eine Folge von Folgen handelt. Für ein gewähltes fixes $n \in \mathbb{N}$ ist $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X.

Es gelte also: $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N : \ \tilde{d}((x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}, (x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}) < \epsilon$

Wegen der Dichtheit ist es möglich, eine spezielle Folge zu konstruieren:
$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in X : \ \tilde{d}(\phi(y_n), [(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]) < \frac{1}{n}$

Für $n, m \to \infty$ folgt aus der Dreiecksungleichung:
$d(y_m, y_n) = \tilde{d}(\phi(y_m), \phi(y_n))$
$\leq \tilde{d}(\phi(y_m), [(x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}]) \ + \ \tilde{d}([(x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}], [(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]) \ + \ \tilde{d}([(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}], \phi(y_n)) \to 0.$

Damit ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, insbesondere gilt $[(y_k)_{k\in\mathbb{N}}] \in \tilde{X}$.

Schlussendlich gilt mit $n \to \infty$:
$\tilde{d}([(y_k)_{k\in\mathbb{N}}], [(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]_{n\in\mathbb{N}}) \leq \tilde{d}([(y_k)_{k\in\mathbb{N}}], \phi(y_n)) + \tilde{d}(\phi(y_n), [(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}]_{n\in\mathbb{N}}) < \lim\limits_{k\to\infty} d(y_k, y_n) + \frac{1}{n} \to 0.$

Damit ist $[(y_k)_{k\in\mathbb{N}}]$ der gesuchte Grenzwert. Da also jede Cauchy-Folge in $\tilde{X}$ einen Grenzwert besitzt, ist der metrische Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ vollständig.

$\square$

Nun wollen wir den Satz von Baire behandeln.

Lemma 2
Der Durchschnitt endlich vieler offener dichter Mengen ist wieder offen und dicht.

Definition 15
Ein topologischer Raum heißt **Baire-Raum**, falls jeder abzählbare Durchschnitt von offenen dichten Mengen dicht ist.

Definition 16
Für topologische Räume legen wir fest:

- Der abzählbare Durchschnitt von offenen Mengen heißt **G_δ-Menge**.
- Die abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen heißt **F_σ-Menge**.

Korollar 6
In einem Baire-Raum ist der abzählbare Durchschnitt von dichten G_δ-Mengen wieder dicht.

Definition 17
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

- Gelte: $\exists M_i$ abzählbar viele nirgends dichte Mengen $\ : \ X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$

  Dann heißt X von **1. Kategorie**.
- Sonst heißt X von **2. Kategorie**.

Satz 4 (Satz von Baire)
Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum.

Beweis. Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum. Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folge offener dichter Teilmengen von X und $D = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i$.

Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon_0 > 0$ beliebig. Wir wollen nun zeigen, dass $B(x_0, \epsilon_0) \cap D$ nicht leer ist (gilt dies für beliebige x_0 und ϵ_0, so folgt daraus, dass D dicht ist).

Wir konstruieren induktiv für $n \in \mathbb{N}$:
U_n ist dicht und offen, also ist die Menge $B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \cap U_n$ offen und nicht leer. Somit:
$\exists x_n \in B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \ \cap \ U_n \ \exists \epsilon_n > 0 \ :$
$\epsilon_n < \frac{1}{2}\epsilon_{n-1}$ und $\overline{B}(x_n, \epsilon_n) \subset B(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \ \cap \ U_n$
Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \overline{B}(x_n, \epsilon_n) \subset B(x_0, \epsilon_0) \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ und $\epsilon_n < \frac{1}{2^n}\epsilon_0$

Nun gilt für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : m > n \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^n}\epsilon_0$, sie ist somit also Cauchy-Folge und besitzt einen Grenzwert x_∞. Da für fixiertes n gilt, dass $\forall m > n \ : \ x_m \in \overline{B}(x_n, \epsilon_n)$, gilt wegen der Abgeschlossenheit auch $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_\infty \in \overline{B}(x_n, \epsilon_n)$. Also:
$x_\infty \in B(x_0, \epsilon_0) \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ für alle n und im Grenzübergang
$x_\infty \in B(x_0, \epsilon_0) \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots = B(x_0, \epsilon_0) \cap D$
Die Menge $B(x_0, \epsilon_0) \cap D$ ist also nicht leer, was zu zeigen war.

□

Satz 5 (Baire'scher Kategoriensatz)
Jeder vollständige metrische Raum ist von 2. Kategorie.

Beweis. Indirekt. Sei (X, d) vollständiger Raum 1. Kategorie. Es gilt nach Annahme: $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wobei A_n nirgends dicht.
Die Mengen $(\overline{A_n})^C = Int(A_n^C) = Ext(A_n) =: U_n$ sind offen und dicht. Nach dem Satz von Baire ist also ihr Durchschnitt dicht.
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\overline{A_n})^C = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)^C \subset \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = X^C = \emptyset.$
Die leere Menge ist aber nicht dicht. Widerspruch!

□

Der Kategoriensatz lässt sich gut für nicht konstruktive Existenzbeweise verwenden. Nicht konstruktiv bedeutet in diesem Sinne, dass der Beweis zwar die Existenz eines mathematischen Objekts belegt, aber aus ihm nicht hervorgeht, wie dieses Objekt genau aussieht oder sich konstruieren lässt.

Beispiel 9
Wir wollen zeigen, dass eine stetige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ existiert, die in keinem Punkt differenzierbar ist. Wir betrachten also den vollständigen metrischen Raum $(\mathcal{C}[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$. Es sei
$A_n := \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \ \forall h \in (0, \frac{1}{n}) \ : \ |\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \leq n\}$

Diese Mengen sind nirgends dicht. Weiters enthält die Vereinigung $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alle Funktionen, die in zumindest einen Punkt rechtsseitig differenzierbar sind. Da $\mathcal{C}[0, 1]$ sich nach obigem Satz nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen schreiben lässt, ist $D \subsetneq \mathcal{C}[0, 1]$. $\mathcal{C}[0, 1]$ muss also eine Funktion enthalten, die nirgends rechtsseitig differenzierbar, also insbesondere nirgends differenzierbar ist.

Beispiel 10
Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{Q}, d)$, wobei d die gewöhnliche Betragsmetrik ist. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, können wir $\mathbb{Q}$ darstellen als $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}$, wobei $q_n \in \mathbb{Q}$. Da ein einzelner Punkt nirgends dicht ist, erhalten wir, dass $\mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen dargestellt werden kann. $\mathbb{Q}$ ist also von 1. Kategorie und kann damit nicht vollständig sein.

Definition 18
Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Sei $C \subset X$.

C heißt **kompakt**, falls gilt:

$$\forall (U_i)_{i_I} \in \mathcal{T}^I \text{ mit } C \subset \bigcup_{i \in I} U_i \ \exists n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I: \ C \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

In Worten: C ist kompakt, falls jede offene Überdeckung von C eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 6
Sei (X, d) metrischer Raum. Sei $C \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- C ist kompakt.
- $\forall (x_n) \in C^{\mathbb{N}} \ \exists (n_k)$ Indexfolge, $z \in C: \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = z$.
  In Worten: Jede Folge in C besitzt eine Teilfolge, die in C konvergiert.
- C ist vollständig und total beschränkt, daher:
  $\forall \epsilon > 0 \ \exists x_1, \ldots x_{n_\epsilon} \in C \ : \ C \subset \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B(x_i, \epsilon)$
- C ist abgeschlossen und jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen von C mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt, daher:
  $\left(\forall J \subset I \text{ endlich} \ : \ \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset \right) \ \to \ \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

3 Banachräume und L^p-Räume

Definition 19
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gelte:

(1) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \to x = 0)$

(2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann heißt $\|\cdot\|$ **Norm** auf X und $(X, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**.
$d(x, y) := \|x - y\|$ heißt die durch die Norm **induzierte Metrik**.

Ein normierter Raum ist ein Vektorraum, in dem jedem Vektor eine reelle Zahl als Größe zugeordnet wird. Wir erhalten einen metrischen Raum, indem wir den Abstand zweier Vektoren als die Größe ihrer Differenz festlegen. Da jede Norm also eine Metrik induziert, lassen sich alle Begriffe von metrischen Räumen auf normierte Räume übertragen.

Wird mit mehreren verschiedenen normierten Räumen gleichzeitig gearbeitet, werden die Normen üblicherweise in der Notation nicht voneinander unterschieden, da sich aus dem Kontext ergibt, um welche Norm es sich handelt. Will man sie klar voneinander unterscheiden, bietet es sich an, den zugehörigen Vektorraum im Subskript dazuzuschreiben (beispielsweise Vektorraum X mit der Norm $\|\cdot\|_X$).

Definition 20
Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Zu den wichtigsten Banachräumen zählen die L^p-Räume. Eine rigorose Behandlung der L^p-Räume findet sich in der Maß- und Integrationstheorie, im Folgenden wiederholen wir die wesentlichen Begriffe.

Definition 21
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Für eine messbare Funktion $f : S \to \mathbb{C}$ ist

$[f] := \{g : S \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid f = g \ \mu\text{-fast überall}\}$

die Äquivalenzklasse aller Funktionen, die sich nur um eine μ - Nullmenge von f unterscheiden.

Für $p \in [1, \infty]$ seien definiert:

$L^p(S, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] \mid f : S \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \|f\|_p < \infty\}$

wobei $\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ falls $p \in [1, \infty)$ und

$\|f\|_\infty = essup(f) := inf\{M \in \mathbb{R} \mid |f| \leq M \ \mu\text{-fast überall}\}$.

Bei den L^p-Räumen handelt es sich also rigoros um Mengen von Äquivalenzklassen. In der Praxis wird jedoch nicht mehr ganz darauf geachtet; Man rechnet einfach mit konkreten Repräsentanten der Äquivalenzklassen und betrachtet zwei Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Werden jedoch beispielsweise neue Operationen auf den L^p-Räumen definiert, darf nicht darauf vergessen werden, die Wohldefiniertheit, also die Unabhängigkeit vom Repräsentanten sicherzustellen.

Ergibt sich aus dem Kontext, um welchen Maßraum es sich bei einem L^p-Raum handelt, so ist es auch üblich, die σ-Algebra oder auch den ganzen Maßraum in der Notation wegzulassen:
$L^p(S, \mathcal{A}, \mu) = L^p(S, \mu) = L^p$

Zur Wiederholung beweisen wir einige wichtige Sätze, die bereits in der Maß- und Integrationstheorie behandelt wurden, nämlich die Hölder-Ungleichung, die Minkowsi-Ungleichung und die Vollständigkeit aller L^p-Räume.

Lemma 3 (Young'sche Ungleichung)
Seien $a, b \geq 0$ zwei reelle nichtnegative Zahlen. Seien $p, q > 1$ reelle Zahlen derart dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (man sagt auch: p und q sind zueinander hölder-konjugiert). Dann gilt:

$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Weiterhin gilt Gleichheit genau dann, wenn $a^p = b^q$ gilt.

Beweis. o.B.d.A seien $a, b > 0$, sonst ist die Ungleichung trivial. Wir verwenden, dass der natürliche Logarithmus streng konkav ist, daher:
$\forall \lambda \in (0,1)\ \forall x, y \in (0, \infty),\ x \neq y\ :\ \log(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \log x + (1-\lambda)\log(y)$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y$. Damit folgt:
$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \cdot \log(a^p) + \frac{1}{q} \cdot \log(b^q) \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q})$
Da der Logarithmus weiterhin streng monoton steigend ist, folgt direkt die Behauptung:
$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
und nach obiger Bemerkung auch Gleichheit genau dann, wenn $a^p = b^q$ ist.

□

Satz 7 (Hölder-Ungleichung)
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Seien $f, g :\ S \to [0, \infty]$ nichtnegative messbare Funktionen. Seien $p, q > 1$ reelle Zahlen derart dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$\int f \cdot g\ d\mu \leq (\int f^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int g^q\ d\mu)^{\frac{1}{q}}$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\left(\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right)^p = \left(\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right)^q$

Beweis. Seien $A := (\int f^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}}$, $B := (\int g^q\ d\mu)^{\frac{1}{q}}$. O.b.d.A. seien $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$, sonst ist die Ungleichung trivial. Nach der vorherigen Ungleichung gilt:
$\forall x \in S\ :\ \frac{f(x)}{A} \cdot \frac{g(x)}{B} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{f(x)}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{g(x)}{B}\right)^q$
Wir wenden auf beiden Seiten das Integral an:
$\int \frac{f(x)}{A} \cdot \frac{g(x)}{B}\ d\mu\ \leq\ \frac{1}{p \cdot A^p} \cdot \int f(x)^p\ d\mu + \frac{1}{q \cdot B^q} \int g(x)^q\ d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Die Behauptung folgt, indem wir A und B auf die andere Seite bringen:
$\int f \cdot g\ d\mu \leq A \cdot B = (\int f^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int g^q\ d\mu)^{\frac{1}{q}}$.
An der Stelle, an der wir die vorherige Ungleichung anwenden, erkennen wir auch, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $\left(\frac{f(x)}{A}\right)^p = \left(\frac{g(x)}{B}\right)^q$

□

Satz 8 (Minkowski-Ungleichung)
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Sei $p \in [1, \infty)$. Seien $f, g \in L^p(S, \mu)$. Dann gilt:

$\left(\int |f+g|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Beweis. o.B.d.A. sei die linke Seite der Ungleichung > 0 und die rechte Seite der Ungleichung $< \infty$, sonst ist die Ungleichung trivial. Weiterhin sei ohne Einschränkung $p > 1$, denn im Fall $p = 1$ folgt die Ungleichung einfach aus der gewöhnlichen Dreiecksungleichung des Betrags.

Zunächst bestimmen wir ein $q > 1$ derart, dass: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dies ergibt $q = \frac{p}{p-1}$.

Nun formen wir um:
$\int |f+g|^p\ d\mu = \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1}\ d\mu \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} \int (|f| + |g|) \cdot |f+g|^{p-1}\ d\mu$
$= \int |f| \cdot |f+g|^{p-1}\ d\mu + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1}\ d\mu$
Wir betrachten einen der letzten beiden Summanden und wenden die Hölder-Ungleichung an:
$\int |f| \cdot |f+g|^{p-1}\ d\mu\ \leq\ \left(\int |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^{\frac{p-1}{q}}\ d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\ =\ \left(\int |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^p\ d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$. Analog schätzen wir den zweiten Summanden ab.

Wir erhalten damit insgesamt:
$\int |f+g|^p \, d\mu \ \leq \left(\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}.$
Die Division der Ungleichung durch den positiven Term $\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$ liefert genau die von uns gewünschte Ungleichung.

□

Die Minkowski-Ungleichung zeigt die Dreieckungleichungen der p-Normen. Die anderen Normeigenschaften sind leicht nachzuweisen, genauso auch die Dreiecksungleichung für den Spezialfall $p = \infty$. Somit ist es also gerechtfertigt, von den L^p-Räumen als normierte Räume zu sprechen.

Der folgende Satz zeigt die Vollständigkeit der L^p-Räume. Hier wollen wir nur den Fall $1 < p < \infty$ betrachten, die anderen beiden Fälle sind ähnlich zu zeigen.

Satz 9
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Sei $p \in (1, \infty)$. Es gilt:

$(L^p(S, \mu), \|\cdot\|_p)$ ist vollständig.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in L^p. Es gibt somit eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, für die gilt:
$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Nun definieren wir eine Funktionenfolge:
$g_N := \sum\limits_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Darauf die Norm und anschließend die Dreiecksungleichung angewendet liefert:
$\|g_N\|_p = \| \sum\limits_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \|_p \leq \sum\limits_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} < 1.$

Die g_N bilden eine nichtnegative, monoton ansteigende Funktionenfolge. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz konvergieren die g_N gegen ihre Grenzfunktion, genauer gesagt gegen die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Nach obiger Abschätzung ist diese Reihe p-integrierbar, somit also auch fast überall endlich.

Da die Funktionenreihe
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$
nach vorheriger Überlegung fast überall absolut konvergiert, existiert auch fast überall der folgende Grenzwert:
$\lim\limits_{N\to\infty} f_{n_N} = \lim\limits_{N\to\infty} f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{N} f_{n_{k+1}} - f_{n_k} =: f.$

Die Funktion f ist unser Kandidat für den Grenzwert der gesamten Folge f_n. Es verbleibt noch zu zeigen, dass $f \in L^p$ und $\|f - f_n\|_p \to 0$.

Zunächst folgt einfach mit der Dreiecksungleichung: $\|f\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k}\|_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit k derart, dass $\|f - f_{n_k}\|_p \leq 1$ ist, und mit der p-Integrierbarkeit von f_{n_k} folgt $\|f\|_p \leq 1 + \|f_{n_k}\|_p < \infty$. Damit ist $f \in L^p$.

Zuletzt folgt mit dem Lemma von Fatou:
$\int |f - f_m|^p \, d\mu = \int \liminf\limits_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \to 0.$
Der letzte Ausdruck geht gegen 0, da die f_n eine Cauchy-Folge bilden. Damit ist gezeigt, dass $\|f - f_m\|_p \to 0$, also f_m gegen f konvergiert.

□

Damit bilden die L^p-Räume also Banachräume.

Beispiel 11
Einfaches, aber auch wichtiges Beispiel sind die Folgenräume (man bedenke, dass Folgen eigentlich Funk-

tionen sind). Wir definieren:
$l^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$
als die Menge der p-summierbaren Folgen, beziehungsweise im Fall $p = \infty$ die Menge der beschränkten Folgen. Dabei ist μ das Zählmaß:
Für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist $\mu(A) := |A|$ die Kardinalität der Teilmenge A.

Die Normen nehmen folgende Gestalt an: Für $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:
$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, falls $1 \leq p < \infty$ und $\|\underline{x}\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$

Die Bezeichung ist einleuchtend: Eine Folge ist p-summierbar, wenn die Summe der Absolutbeträge der Folgenglieder zur p-ten Potenz endlich ist, und eine Folge ist genau dann beschränkt, wenn ihre Unendlich-Norm, daher das Supremum über die Absolutbeträge ihrer Folgenglieder endlich ist.

4 Lineare Operatoren

Definition 22
Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $T: X \to Y$ eine Abbildung (auch genannt Operator).

- T heißt **Funktional**, falls $Y = \mathbb{K}$.
- T heißt **linear**, falls gilt: $\forall a, b \in X\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : T(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \lambda \cdot T(a) + \mu \cdot T(b)$.

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ zusätzlich normierte Räume und sei T linear.

- $\|T\| := \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$ (bzw. $\|T\| := 0$ falls $X = \{0\}$ der Nullraum ist) heißt die **Operator-Norm** von T.
- T heißt **beschränkt**, falls $\|T\| < \infty$ ist.

Es ist bei linearen Operatoren übliche Notation, die Argumentklammern wegzulassen, dh. $T(x) = Tx$.

Definition 23
Seien X, Y normierte Räume.

$B(X, Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ linear und beschränkt}\}$ ist die Menge der linearen und beschränkten Operatoren von X nach Y.

Die Menge aller beschränkten linearen Operatoren von einem normierten Raum in einen anderen bildet selbst wieder einen normierten Raum mit der oben festgelegten Operator-Norm. Man kann zudem zeigen, dass dieser Raum vollständig (also ein Banachraum) ist, wenn Y vollständig ist.

Korollar 7
Seien X, Y normierte Räume. Sei $T: X \to Y$ linearer Operator. Dann gilt:

$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$.

Beweis. O.B.d.A sei $x \neq 0$ und $\|T\| < \infty$, sonst ist die Ungleichung klar. Nach Supremumseigenschaft gilt:
$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup\limits_{z \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(z)\|_Y}{\|z\|_X} = \|T\|$.
Auf beiden Seiten mit $\|x\|_X$ multiplizieren liefert: $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$. □

Satz 10
Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(1) T ist beschränkt.

(2) T ist stetig.

(3) T ist in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2).
Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig. Es gilt:
$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\|$.
T ist also Lipschitzstetig mit Konstante $\|T\| < \infty$, insbesondere ist T also stetig.

(2) $\Rightarrow$ (3). Trivial

(3) $\Rightarrow$ (1).
Es gelte: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : \|x_0 - x\| \leq \delta \to \|T(x_0) - T(x)\| \leq \epsilon$.
Sei $\overline{x} \in X$ derart, dass $\|\overline{x}\| = 1$. Sei $\epsilon = 1$. Dann gibt es $\delta > 0$ derart, dass dieses Epsilon-Delta-Kriterium erfüllt ist. Wir setzen an:

$\|(x_0 + \delta \cdot \overline{x}) - x_0\| = \|\delta \cdot \overline{x}\| = \delta \cdot \|\overline{x}\| = \delta$. Daraus folgt, dass:
$\|T(x_0 + \delta \cdot \overline{x}) - T(x_0)\| = \|T(\delta \cdot \overline{x})\| = \delta \cdot \|T(\overline{x})\| \leq \epsilon = 1$ und somit:
$\forall \overline{x} \in X$ mit $\|\overline{x}\| = 1 \ : \ \|T(\overline{x})\| \leq \frac{1}{\delta}$, insbesondere also $\|T\| \leq \frac{1}{\delta}$.

□

Beispiel 12
Es sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $p, q > 1$ zueinander konjugiert und $g \in L^q(S, \mu)$.
Dann sei definiert für $f \in L^p(S, \mu)$: $T_g(f) = \int_S f \cdot \overline{g} \, d\mu$ ($\overline{g}$ bezeichne die komplexe Konjugation von g).
Diese Funktion ist eine wohldefinierte Abbildung nach $\mathbb{C}$, da nach Hölder-Ungleichung für alle f gilt: $|T_g(f)| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty$.

Sie ist klarerweise linear, da das Lebesgue-Integral linear ist. Weiterhin folgt aus der obigen Ungleichung, falls $f \neq 0$: $\frac{|T_g(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q < \infty$. Insgesamt ist T_g damit ein lineares beschränktes Funktional. Da es beschränkt ist, ist es auch nach dem obigen Satz stetig.

Beispiel 13
Auf ähnliche Weise wie zuvor lassen sich auch Operatoren $L^p \to L^p$ betrachten. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und $k : [a, b]^2 \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Dadurch wird ein Operator definiert: Für $p, q > 1$ zueinander konjugiert und $f \in L^p([a, b], \lambda)$ sei: $K(f)(x) = \int_{[a,b]} k(x, y)f(y)d\lambda(y)$. Damit ist $K : L^p \to L^p$ ein linearer Operator. Diesen können wir auf Beschränktheit untersuchen:

$$\|K(f)\|_p^p = \int_{[a,b]} \left| \int_{[a,b]} k(x, y)f(y)d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x)$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} |k(x, y)|^q d\lambda(y) \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{[a,b]} |f(y)|^p d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$= \|f\|_p^p \underbrace{\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} |k(x, y)|^q d\lambda(y) \right)^{\frac{p}{q}} d\lambda(x)}_{=:M}$$

Falls $M < \infty$, dann ist K ein beschränkter und linearer Operator.

Beispiel 14
Wir wiederholen heuristisch einige Begriffe der Graphentheorie:

- Ein ungerichteter Graph G ist ein Tupel $G = (V, E)$. V ist eine Menge an Knoten, die untereinander durch Kanten aus E verbunden sind.
- Für $x, y \in V$ notieren wir $x \sim y$, falls x und y über eine Kante direkt miteinander verbunden sind. Da wir von einem ungerichteten Graphen sprechen, ist $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$.
- Der Graph heißt zusammenhängend, falls für beliebige zwei Knoten $x, y \in V$ ein Weg existiert, also eine Abfolge von Knoten beginnend mit x und endend mit y, wobei die Knoten dieser Abfolge nacheinander mit Kanten verbunden sind.
- Für $x \in V$ ist $\Gamma(x) := \{y \in V \mid x \sim y\}$ die Nachbarschaft von x, also die Menge an Knoten, die direkt mit x über einer Kante verbunden sind.
- Der Graph heißt lokal endlich, falls die Nachbarschaft jedes Knotens endlich ist.

Sei also $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, lokal endlicher Graph, V höchstens abzählbar. Für $A \subset V$ sei $\mu(A) := \sum\limits_{x \in A} |\Gamma(x)|$, also die Anzahl aller Nachbarn aller Knoten aus A. Dies definiert einen Maßraum $(V, \mathcal{P}(V), \mu)$ sowie den L^p-Raum $L^2(V, \mathcal{P}(X), \mu) =: l^2$. Damit ist die Norm von $f \in l^2$:
$\|f\|_2 = \left(\sum\limits_{x \in V} f^2(x)\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$. Weiters sei $p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{\mu(x)} \text{ , falls } y \in \Gamma(x) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$
Damit erhalten wir einen linearen Operator $P : \ l^2 \to l^2$ mit
$P(f)(x) := \sum\limits_{y \in \Gamma(x)} p(x, y)f(y)$
für $f \in l^2, x \in V$. Wir überprüfen nun die Beschränktheit.

Zunächst stellt man fest: $\forall x, y \in V: \ p(x,y)\mu(x) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } y \in \Gamma(x) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} = p(y,x)\mu(y)$.

Also gilt:

$$\|P(f)\|_2^2 = \sum_{x\in V} P^2(f)(x)\mu(x) = \sum_{x\in V}\left(\sum_{y\in\Gamma(x)} p(x,y)f(y)\right)^2 \mu(x) =$$

$$\sum_{x\in V}\left(\sum_{y\in\Gamma(x)} \sqrt{p(x,y)}\cdot\sqrt{p(x,y)\mu(x)}f(y)\right)^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{x\in V}\underbrace{\left(\sum_{y\in\Gamma(x)} p(x,y)\right)}_{=1}\left(\sum_{y\in\Gamma(x)}\underbrace{\mu(x)p(x,y)}_{=p(y,x)\mu(y)} f^2(y)\right) = \sum_{x\in V}\sum_{y\in\Gamma(x)} p(y,x)\mu(y)f^2(y)$$

$$= \underbrace{\sum_{y\in V} f^2(y)\mu(y)}_{=\|f\|_2^2}\underbrace{\sum_{x\in\Gamma(y)} p(y,x)}_{=1} = \|f\|_2^2.$$

Insbesondere gilt also $\|P\| = 1$ falls V endlich ist, denn für $f \equiv 1$ gilt $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2 < \infty$.

Mithilfe solcher Betrachtungen lassen sich Zufallsprozesse im Zusammenhang mit Graphen analysieren, wie beispielsweise eine zufällige Irrfahrt in einem Straßennetz (an jeder Kreuzung, an der man ankommt wählt man zufällig die nächste Straße, in die man einbiegt).

Beispiel 15 (*)
Es sei $\frac{d}{dx}: \mathcal{C}^1[-1,1] \to \mathcal{C}[-1,1]$ der Differentialoperator eingeschränkt auf die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ (beide Funktionenräume seien mit der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen). Dieser ist ein linearer Operator, der jedoch unbeschränkt ist:
Für $\sigma \in (0,1)$ definiere $f_\sigma(x) = \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$.
Es lässt sich zeigen, dass $\frac{\|\frac{d}{dx}(f_\sigma)\|_\infty}{\|f_\sigma\|_\infty} = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{e}} \to \infty$ für $\sigma \to 0$.
Da der Differentialoperator also unbeschränkt ist, ist er nirgendwo im Definitionsbereich stetig.

Satz 11
Sei X normierter Raum. Sei $V \subset X$ abgeschlossener Teilraum von X. Sei $y \in X\setminus V$. Dann ist die Menge $V + \mathbb{K}\cdot y \ := \{v + \lambda\cdot y \mid v \in V, \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ wieder abgeschlossen.

Beweis. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $z \in X$ konvergente Folge in der Menge $V + \mathbb{K}\cdot y$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Darstellung $z_n = v_n + \lambda_n \cdot y$, wobei $v_n \in V, \ \lambda_n \in \mathbb{K}$. Es gilt: $\|v_n + \lambda_n \cdot y\| \to \|z\|$, also ist die reelle Folge beschränkt: $\|v_n + \lambda_n\cdot y\| \leq C$.

Die Folge λ_n ist beschränkt. Sonst gilt nämlich für eine Teilfolge: $|\lambda_{n_k}| \to \infty$ und damit
$\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\cdot\|v_{n_k} + \lambda_{n_k}\cdot y\| = \|\frac{1}{\lambda_{n_k}}\cdot v_{n_k} + y\| \leq \frac{C}{|\lambda_{n_k}|} \to 0$.
Also würde gelten, dass die Folge $-\frac{v_{n_k}}{\lambda_{n_k}}$ gegen y konvergiert. Da die Folge in der abgeschlossenen Menge V liegt, müsste auch der Grenzwert y in V liegen, was ein Widerspruch zur Wahl von y wäre.

Da die Folge λ_n beschränkt ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$. Eine Umformulierung von $v_{n_k} + \lambda_{n_k}\cdot y \to z$ liefert $v_{n_k} \to z - \lambda_0\cdot y =: v_0$, dieser Grenzwert liegt wieder in V, da V abgeschlossen ist. Damit existiert eine Darstellung $z = v_0 + \lambda_0\cdot y \in V + \mathbb{K}\cdot y$, womit die Behauptung beweisen ist. □

Mit vollständiger Induktion folgt aus diesem Satz sofort, dass alle endlich-dimensionalen Teilräume eines normierten Raumes abgeschlossen sind.

5 Hilberträume

Definition 24
Sei H Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle \ : \ H \times H \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

Gelte $\forall x, y, z \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (insbesondere falls $\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)

(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(3) $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$

(4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(5) $\langle x, x \rangle = 0 \ \leftrightarrow \ x = 0$

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **inneres Produkt** (oder auch **Skalarprodukt**) auf H. Das Tupel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **Prä-Hilbertraum**.

In unserem Fall ist das Skalarprodukt im ersten Argument linear. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, bedeutet dies wegen der komplexen Konjugation beim Vertauschen der Argumente, dass Skalare, die aus dem zweiten Argument "herausgehoben"werden, konjugiert werden (das Skalarprodukt ist im zweiten Argument antilinear). Häufig (vor allem außerhalb der Analysis) wird eine alternative Definition des Skalarproduktes verwendet, bei der es im zweiten statt im ersten Argument linear ist. Im komplexen Fall ist also genau darauf zu achten, in welchem Argument das Skalarprodukt linear oder antilinear ist.

Satz 12
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbertraum. Sei für $x \in X$ definiert: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Es gilt:

- die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:
  $\forall x, y \in H \ : \ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
  Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.
- die Parallelogrammgleichung:
  $\forall x, y \in H \ : \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$
- $\| \cdot \|$ bildet eine Norm auf H

Damit ist also jeder Prä-Hilbertraum ein normierter Raum.

Man kann auch zeigen, dass jede Norm, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, durch ein Skalarprodukt induziert wird.

Definition 25
Ein vollständiger Prä-Hilbertraum heißt **Hilbertraum**.

Beispiel 16
Für $f, g \in L^2(S, \mathcal{A}, \mu)$ definieren wir: $\langle f, g \rangle := \int f \cdot \overline{g} \, d\mu$. Man stellt leicht fest, dass dies ein Skalarprodukt ist und die uns bereits bekannte 2-Norm induziert. Da $L^2(S, \mathcal{A}, \mu)$ weiters vollständig ist, bildet er einen Hilbertraum.

Beispiel 17 (*)
Es seien $x = (1\ 0\ 0 \dots), y = (0\ 1\ 0 \dots) \in l^\infty$. Versuchen wir, diese Folgen in die Parallelogrammgleichung einzusetzen, erhalten wir:
$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$.
Da die Supremumsnorm die Parallelogrammgleichung also nicht erfüllt, kann sie nicht durch ein Skalarprodukt induziert werden.

Der Banachraum l^∞ ist also kein Prä-Hilbertraum.

Definition 26
Es sei X ein Vektorraum und $E \subset X, E \neq \emptyset$. Gelte:
$\forall x, y \in X \ \forall \lambda \in [0,1] \ : \ x + \lambda \cdot (y - x) \in E$
Dann heißt E **konvex**.

In Worten ist eine Menge konvex, wenn für zwei beliebige Punkte aus der Menge auch ihre Verbindungsgerade in der Menge liegt.

Satz 13
Sei H Hilbertraum. Sei $E \subset H$ abgeschlossene konvexe Teilmenge von H. Dann gilt:
$\exists! e \in E \ : \ \inf\limits_{x \in E} \|x\| = \|e\|$
In Worten: E besitzt ein eindeutig bestimmtes Element mit minimaler Norm.

Beweis. Setze $\delta := \inf\limits_{x \in E} \|x\|$. Für $x, y \in E$ gilt nach Parallelogrammgleichung:
$\|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\|^2 + \|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
$\Rightarrow \ \frac{1}{4}\|x - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \| \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y}_{\in E} \|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta^2$
$\Rightarrow \ \|x - y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4\delta^2$

Nach Infimums-Eigenschaft gilt :
$\exists (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \ \|e_n\| \to \delta$. Verwenden wir die oben hergeleitete Ungleichung, folgt:
$\|e_m - e_n\|^2 \leq 2(\|e_m\|^2 + \|e_n\|^2) - 4\delta^2 \to 0$, falls $n, m \to \infty$. Somit ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da H vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Wert $e \in H$. Da E weiters abgeschlossen ist, gilt $e \in E$. Schlussendlich folgt aus Stetigkeit: $\|e_n\| \to \|e\| = \delta$. e ist also ein Element aus E mit minimaler Norm.

Es verbleibt zu zeigen, dass dieses Element eindeutig ist. Seien also $e, \overline{e} \in E$ derartige minimierende Elemente. Dann folgt wieder aus der hergeleiteten Ungleichung:
$\|e - \overline{e}\|^2 \leq 2(\|e\|^2 + \|\overline{e}\|^2) - 4\delta^2 = 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \ \Rightarrow \ \|e - \overline{e}\| = 0 \ \Rightarrow \ e = \overline{e}$ □

Definition 27
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbertraum. Seien $x, y \in H$ und sei $M \subset H$ Teilmenge von H.

- x und y heißen zueinander **orthogonal**, falls $\langle x, y \rangle = 0$.
  Schreibweise: $x \perp y$.
- $M^\perp := \{t \in H \mid \forall m \in M : t \perp m\}$ heißt das **orthogonale Komplement** von M.

Es ist leicht zu zeigen, dass das orthogonale Komplement einer Menge stets ein abgeschlossener Teilraum ist.

Satz 14
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertraum. Sei $M \subset H$ abgeschlossener Teilraum. Dann gilt:
$\forall x \in H \ \exists! u \in M, v \in M^\perp : \ x = u + v$ (Es gilt die direkte Summe $M \bigoplus M^\perp = H$)

In Worten: Für jedes Element in H gibt es eine eindeutige Zerlegung in zwei Elemente aus M bzw. $M^\perp$.

Beweis. Sei $x \in H$ beliebig. Die Menge $x + M = \{x + m \mid m \in M\}$ ist abgeschlossen und konvex. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes Element $v \in x + M$ mit minimaler Norm. Weiters sei $u = x - v$. Damit folgt schon einmal $x = u + v$ und $u \in M$.

Wir wollen nun zeigen, dass $v \in M^\perp$ gilt. Sei $w \in M \backslash \{0\}$ beliebig und $\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$.

Es gilt nach Konstruktion von v: $\|v-\lambda w\|^2 \geq \|v\|^2$
$\Rightarrow\ \langle v,v\rangle + \lambda\langle w,v\rangle + \overline{\lambda}\langle v,w\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w,w\rangle \geq \langle v,v\rangle$
$\Rightarrow\ -2\frac{\langle v,w\rangle\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle} + \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \geq 0$
$\Rightarrow\ -\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle} \geq 0\ \Rightarrow\ \langle v,w\rangle = 0$
Damit gilt $v \in M^\perp$.

Zuletzt zeigen wir noch Eindeutigkeit. Seien $u_1, u_2 \in M, v_1, v_2 \in M^\perp$ derart, dass $x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Daraus folgt aber: $\underbrace{u_1 - u_2}_{\in M} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in M^\perp} \in M \cap M^\perp = \{0\}\ \Rightarrow\ u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$

□

Satz 15
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertraum. Sei $M \subset H$ abgeschlossener Teilraum. Seien $P:\ H \to M,\ Q:\ H \to M^\perp$ Abbildungen derart, dass $x = P(x) + Q(x)$ (P und Q zerlegen x wie im letzten Satz). Es gilt:

(1) $x \in M \Leftrightarrow P(x) = x \Leftrightarrow Q(x) = 0$
$x \in M^\perp \Leftrightarrow P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = x$
Insbesondere gilt: $\forall x \in H$:
$P(P(x)) = P(x),\ Q(Q(x)) = Q(x),\ P(Q(x)) = Q(P(x)) = 0$

(2) $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$

(3) P und Q sind linear und beschränkt.

(4) $\|x - P(x)\| = \min\{\|x-y\| \mid y \in M\}$
$\|x - Q(x)\| = \min\{\|x-z\| \mid z \in M^\perp\}$

(5) $M = (M^\perp)^\perp$

Beweis. (1) Trivial.

(2) $\|x\|^2 = \|P(x)+Q(x)\|^2$
$= \langle P(x),P(x)\rangle + \underbrace{\langle P(x),Q(x)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Q(x),P(x)\rangle}_{=0} + \langle Q(x),Q(x)\rangle$
$= \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$

(3) Seien $x, y \in H, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$\lambda x + \mu y = \underbrace{(\lambda P(x) + \mu P(y))}_{\in M} + \underbrace{(\lambda Q(x) + \mu Q(y))}_{\in M^\perp}$
Da die Zerlegung eindeutig ist, gilt:
$P(\lambda x + \mu y) = \lambda P(x) + \mu P(y),\ Q(\lambda x + \mu y) = \lambda Q(x) + \mu Q(y)$, also Linearität.

Aus Punkt 2 folgt $\|P(x)\| \leq \|x\|$ und $\|Q(x)\| \leq \|x\|$, aus Punkt 1 folgt $\|P(x)\| = \|x\|$ bzw. $\|Q(x)\| = \|x\|$ für $x \in M$ bzw. $x \in M^\perp$, daher sind $\|P\| = \|Q\| = 1$, falls P oder Q nicht ohnehin die Nullfunktion ist. Also sind die Abbildungen beschränkt.

(4) Nach Konstruktion von Q (für P analog) gilt:
$\|x - P(x)\| = \|Q(x)\| = \min\limits_{y \in M} \|x - y\|$.

(5) Klar ist, dass gilt: $M \subset (M^\perp)^\perp$.
Sei nun $x \in (M^\perp)^\perp$. Für $\tilde{m} \in M^\perp$ beliebig gilt:
$0 = \langle x, \tilde{m}\rangle = \underbrace{\langle P(x), \tilde{m}\rangle}_{=0} + \langle Q(x), \tilde{m}\rangle\ \Rightarrow\ Q(x) = 0\ \Rightarrow\ x = P(x) \in M$.
$\Rightarrow M = (M^\perp)^\perp$ □

Satz 16
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbertraum.

Sei $y \in H$. Dann ist $T_y : H \to \mathbb{K},\ x \mapsto \langle x, y \rangle$ lineares und beschränktes Funktional und $\|T_y\| = \|y\|$.

Weiters gilt: $T_y = T_z \ \Rightarrow\ y = z$.

Beweis. Die Linearität folgt sofort aus den Grundeigenschaften des Skalarproduktes. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $|T_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\|\|x\|$, also gilt $\|T_y\| \leq \|y\| < \infty$ Beschränktheit. Die Abschätzung ist scharf, denn: $|T_y(y)| = \|y\|^2$, also $\|T\| = \|y\|$.

Gelte für $y, z \in H$, dass $T_y = T_z$. Dann gilt für alle $x \in H$:
$0 = T_y(x) - T_z(x) = \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle = \langle x, y - z \rangle$.
Daraus folgt, dass $y - z \in H^\perp = \{0\} \ \Rightarrow\ y - z = 0$. Also ist $y = z$. □

Satz 17
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertraum. Sei $T : H \to \mathbb{K}$ lineares und beschränktes Funktional.

Dann gibt es ein $y \in H$, sodass: $\forall x \in H :\ T(x) = \langle x, y \rangle$.

Beweis. O.B.d.A sei $T \neq 0$. Wir betrachten den Kern $M := \ker(T)$. Dieser ist ein abgeschlossener Teilraum von H; da T nicht die Nullfunktion ist gilt außerdem $M \neq H$. Da H ein Hilbertraum ist, gilt nach einem obigen Satz: $M \bigoplus M^\perp = H$. Folglich muss $M^\perp$ aus mehr Vektoren als nur dem Nullvektor bestehen: $\exists z \in M^\perp \backslash \{0\}$. Mit $y := \frac{\overline{T(z)}}{\langle z, z \rangle} z$ gilt $T(y) = \langle y, y \rangle$.

Wir wollen nun zeigen, dass für alle x gilt: $T(x) = \langle x, y \rangle$.
Sei $x_1 = x - \frac{T(x)}{\langle y, y \rangle} y$ und $x_2 = \frac{T(x)}{\langle y, y \rangle} y$. Damit ist $x = x_1 + x_2$. Weiters gilt:
$T(x_1) = T(x) - T(x) \cdot \frac{T(y)}{\langle y, y \rangle} = T(x) - T(x) = 0$ also ist $x_1 \in \ker(T) = M$

Damit folgt:
$\langle x, y \rangle = \underbrace{\langle x_1, y \rangle}_{=0} + \langle x_2, y \rangle = \langle \frac{T(x)}{\langle y, y \rangle} y, y \rangle = T(x)$ □

Die letzten beiden Sätze zeigen, dass ein normerhaltender Vektorraumisomorphismus zwischen H und der Menge seiner linearen und beschränkten Funktionale existiert. Wir werden auf diesen Sachverhalt nochmals im Kapitel Dualräume eingehen.

6 Orthonormale Systeme

Definition 28
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j\in J}$ eine Familie aus H. Gelte :
$\langle u_j, u_k\rangle = \begin{cases} 1, \text{ falls } j \neq k \\ 0, \text{ falls } j = k \end{cases}$. Dann heißt diese Familie **Orthonormalsystem**.

J ist dabei eine beliebige Index-Menge und kann also durchaus auch überabzählbar sein.

Lemma 4
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilbertraum. Sei für ein $N \in \mathbb{N}$ $(u_1, \ldots u_N)$ ein endliches Orthonormalsystem. Seien $\lambda_1, \ldots \lambda_N \in \mathbb{K}$ und sei $x := \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j u_j$. Dann gilt:

$\forall j = 1, \ldots N : \lambda_j = \langle x, u_j\rangle$ und $\|x\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} |\lambda_j|^2$

Beweis. $\langle x, u_k\rangle = \langle \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j u_j, u_k\rangle = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j \langle u_j, u_k\rangle = \lambda_k$

$\|x\|^2 = \langle \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j u_j, \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k u_k\rangle = \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_j \overline{\lambda_k} \langle u_j, u_k\rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda|^2$ □

Folgerung aus diesem Lemma ist, dass jedes Orthonormalsystem linear unabhängig ist. Dabei ist zu beachten, dass lineare Unabhängigkeit ein Begriff endlichdimensionaler Linearkombinationen ist. Ein Orthonormalsystem ist deshalb linear unabhängig, weil es nach obigem Lemma zu jeder endlichen Linearkombination x aus den Elementen u_j eindeutig bestimmte Koeffizienten λ_j gibt.

Definition 29
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prä-Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j\in J}$ ein Orthonormalsystem. Sei $x \in H$.

Die Funktion $\hat{x} : J \to \mathbb{K}$, $\hat{x}(j) = \langle x, u_j\rangle$ heißt die **Fouriertransformierte** von x bezüglich dieses Orthonormalsystems.

Lemma 5
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertraum. Sei $(u_1, \ldots u_N)$ endliches Orthonormalsystem. Sei $M := \mathcal{L}\{u_1, \ldots u_N\}$. Dann ist die Projektion von $x \in H$ auf M gegeben durch:

$P(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \hat{x}(j) u_j = \sum\limits_{j=1}^{N} \langle x, u_j\rangle u_j$

Weiters gilt: $\min\limits_{u\in M} \|x-u\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{j=1}^{N} |\hat{x}(j)|^2$

Beweis. Die Projektion ist wohldefiniert, denn wir befinden uns nun in einem Hilbertraum und M ist ein endlichdimensionaler (also abgeschlossener) Teilraum.

Klar ist, dass $P(x) \in M$. Auch gilt für $k = 1, \ldots N$, dass $\langle x - P(x), u_k\rangle = \hat{x}(k) - \hat{x}(k) = 0$. Damit ist $x - P(x)$ orthogonal zur Menge M und damit Element aus dem orthogonalen Komplement $M^{\perp}$. Wir können x also zerlegen: $x = \underbrace{P(x)}_{\in M} + \underbrace{(x - P(x))}_{\in M^{\perp}}$. Nach Definition muss $P(x)$ also die Projektion sein.

Nun untersuchen wir $\min\limits_{u\in M} \|x-u\|^2$. Wir wissen bereits, dass dieses Minimum durch die Projektion angenommen wird: $\min\limits_{u\in M} \|x-u\|^2 = \|x - P(x)\|^2$. Aus einem obigen Satz wissen wir, dass $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$, wobei ja gilt: $Q(x) = x - P(x)$. Umformen liefert uns:

$$\|Q(x)\|^2 = \|x - P(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|P(x)\|^2 = \|x\|^2 - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} |\hat{x}(j)|^2}_{=\|P(x)\|^2} \qquad \square$$

Satz 18 (Bessel'sche Ungleichung)
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j\in J}$ Orthonormalsystem und $x \in H$. Es gilt:
$\{j \in J \mid \hat{x}(j) \neq 0\} \overset{card}{\leq} \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2 \leq \|x\|^2$.

Der Teil mit der Kardinalität ist notwendig, damit die nachfolgene Summe über alle Elemente aus J für uns als Reihe wohldefiniert ist. Sonst hätten wir es mit einer womöglich überabzählbaren Summe zu tun, mit der wir nicht arbeiten können.

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass wir die Ungleichung für den Spezialfall einer endlichen Orthonormalbasis aus dem vorherigen Lemma herleiten können:
$\min\limits_{u\in M} \|x-u\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{j=1}^{N} |\hat{x}(j)|^2 \ \Rightarrow\ \sum\limits_{j=1}^{N} |\hat{x}(j)|^2 \leq \|x\|^2$.

Wir definieren uns für $\forall n \in \mathbb{N}:\ J_n := \{j \in J \mid |\hat{x}(j)|^2 \geq \frac{1}{n}\}$.
Für ein fixes $n \in N$ seien k Indizes aus J_n gewählt: $j_1, \dots j_k \in J_n$. Unsere vorbereitete Ungleichung liefert:

$\|x\|^2 \geq \sum\limits_{l=1}^{k} \underbrace{|\hat{x}(l)|^2}_{\geq\frac{1}{n}} \geq \frac{k}{n} \ \Rightarrow\ k \leq n\cdot\|x\|^2$. Die Anzahl der gewählten Indizes aus J_n ist demnach beschränkt.
Es folgt also, dass jedes J_n nur endlich viele Elemente besitzt.

Wenn wir nun betrachten:
$\{j \in J \mid \hat{x}(j) \neq 0\} = \{j \in J \mid |\hat{x}(j)|^2 > 0\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$
ist diese Menge eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und damit
höchstens abzählbar.

Sei nun $J^* := \{j \in J \mid \hat{x}(j) \neq 0\}$. O.B.d.A sei J^* abzählbar (falls es endlich ist, ist es bereits klar). Dann besitzt die Menge die Form: $J^* = \{j_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}:\ \sum\limits_{k=1}^{n} |\hat{x}(j_k)|^2 \leq \|x\|^2$. Diese Partialsummen sind durch $\|x\|^2$ beschränkt, also auch die Reihe:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(j_k)|^2 = \sum\limits_{j\in J^*} |\hat{x}(j)|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2 \leq \|x\|^2$ $\square$

Beispiel 18
Es sei wie oben ein Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und ein Orthonormalsystem $(u_j)_{j\in J}$ gegeben. Es sei $\mathcal{A}$ die von den endlichen Teilmengen von J erzeugte σ-Algebra, versehen mit dem Zählmaß μ (also ist das Maß einer Teilmenge die Anzahl seiner Elemente). Damit bilden wir einen L^2-Raum: $l^2(J) := L^2(J, \mathcal{A}, \mu)$.

Ein Element dieses Raumes ist eine Funktion $f : J \to \mathbb{K}$. Das Skalarprodukt ist $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{j\in J} f(j)\overline{g(j)}$. Die Norm sieht folgendermaßen aus: $\|f\|_2 = \left(\sum\limits_{j\in J} |f(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ist $f \in l^2(J)$, so soll diese Norm endlich sein. Aus analogen Überlegungen wie im letzten Satz kann man zeigen, dass f nur an höchstens abzählbar vielen Stellen ungleich Null sein kann. Mit diesem Wissen nimmt unser Raum folgende Form an:

$l^2(J) = \{f : J \to \mathbb{K} \mid supp(f) \overset{card}{\leq} \mathbb{N},\ \sum\limits_{j \in J} |f(j)|^2 < \infty\}$
Dabei bezeichnen wir mit $supp(f) := \{j \in J \mid f(j) \neq 0\}$ die Menge aller Argumente, deren Funktionswert ungleich Null ist (vgl. Träger einer Funktion). Wir können nun folgende Abbildung betrachten:

$\mathcal{F}$: $H \to l^2(J)$, $x \mapsto \hat{x}$ ist jene Abbildung, die ein Element $x \in H$ auf seine Fourier-Transformierte abbildet (Dass jede Fourier-Transformierte eines Elements in $l^2(J)$ liegt, wissen wir aufgrund der Bessel'schen Ungleichung). Es ist weiterhin leicht zu zeigen, dass diese Abbildung linear und beschränkt ist (wieder Bessel'sche Ungleichung).

Der nächste Satz zeigt uns, dass diese Funktion sogar surjektiv ist.

Satz 19
Sei H Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j \in J}$ Orthonormalsystem. Dann gilt:
$\forall f \in l^2(J)\ \exists x \in H : \ \hat{x} = f.$

In Worten: Jede quadrat-summierbare Funktion $f : J \to \mathbb{K}$ (die insbesondere an höchstens abzählbar vielen Stellen ungleich Null ist), ist Fourier-Transformierte eines Elements $x \in H$ bezüglich des gegebenen Orthonormalsystems.

Beweis. Es sei $f \in l^2(J)$. Aus analogen Überlegungen wie im letzten Satz gilt
$\forall n \in \mathbb{N} : \ J_n := \{j \in J \mid |f(j)|^2 \geq \frac{1}{n}\}$ ist endlich und $supp(f) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

Wir definieren nun eine Folge in H. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n := \sum\limits_{j \in J_n} f(j)u_j$. Bilden wir von einem x_n wieder die Fouriertransformierte, sieht man sofort:

$\hat{x}_n(j) = \begin{cases} f(j) \text{ , falls } j \in J_n \\ 0 \text{ , falls } j \notin J_n \end{cases}$, also kurz: $\hat{x}_n(j) = f(j) \cdot \mathbb{1}_{J_n}(j)$
(Dabei bezeichnet $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion).

Da nach Konstruktion gilt: $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ und $supp(f) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n$
folgt, dass die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_{J_n}$ punktweise gegen $\mathbb{1}_{supp(f)}$ konvergieren. Damit konvergiert
$\hat{x}_n = f \cdot \mathbb{1}_{J_n}$ punktweise gegen $f \cdot \mathbb{1}_{supp(f)} = f$. Zusätzlich gilt folgende Beschränkung:

$|f(j) - \hat{x}_n(j)| = |f(j) \cdot \mathbb{1}_J(j) - f(j) \cdot \mathbb{1}_{J_n}(j)| = |f(j) \cdot \mathbb{1}_{J \setminus J_n}(j)| \leq |f|$, wobei f nach unserer Annahme integrierbar ist (also $\|f\|_2 < \infty$).

Mit diesem Wissen folgt aus dem Satz der dominierten Konvergenz die Konvergenz der Integrale (welche in unserem Fall ja Summen sind):

$$\|f - \hat{x}_n\|_2 = \left(\int |f - \hat{x}_n|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} |f(j) - \hat{x}_n(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Damit wissen wir, dass $\hat{x}_n$ in der 2-Norm gegen f konvergiert, insbesondere ist $\hat{x}_n$ eine Cauchy-Folge. Nun rufen wir uns Lemma 4 auf Seite 22 in Erinnerung. Für fixierte $m, n \in \mathbb{N}$ sind x_n und x_m endliche Linearkombinationen aus Elementen der Orthonormalbasis, so also auch $x_n - x_m$. Also ist ihre Norm die Summe der Beträge ihrer Koeffizienten zum Quadrat:

$$\|x_n - x_m\|_H^2 = \sum_{j \in J} |\hat{x}_n(j) - \hat{x}_m(j)|^2 = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_2^2 \to 0.$$

Damit bildet die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und aufgrund der Vollständigkeit existiert ein Grenzwert $x \in H$. Schlussendlich sehen wir:

$$\hat{x}(j) = \langle x, u_j\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_j\rangle = \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(j) = f(j) \;\Rightarrow\; \hat{x} = f$$

was zu beweisen war. □

Definition 30
Sei H Prä-Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j\in J}$ ein Orthonormalsystem.

Dieses heißt **vollständiges Orthonormalsystem**, falls gilt:

$\forall x \in H$ (mit $x \neq u_j \; \forall j \in J$) : $\{u_j\}_{j\in J} \cup \{x\}$ ist kein Orthonormalsystem.

Das Konzept der vollständigen Orthonormalsysteme ist die Verallgemeinerung der aus der Linearen Algebra bekannten Orthonormalbasen auf Hilberträume.

Lemma 6 (Lemma von Zorn)
Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $(M, \leq)$ eine Halbordnung. Gelte, dass jede Kette aus M eine obere Schranke in M besitzt. Dann gibt es ein maximales Element.

Begriffserläuterungen:

- $(M, \leq)$ heißt Halbordnung, falls gilt:
  - $\forall a, b \in M : \; a \leq b \;\wedge\; b \leq a \;\to\; a = b$
  - $\forall a, b, c \in M : \; a \leq b \;\wedge\; b \leq c \;\to\; a \leq c$
- $C \subset M$, $C \neq \emptyset$ heißt Kette, falls gilt: $\forall a, b \in C : \; a \leq b \;\vee\; b \leq a$
- $m \in M$ heißt obere Schranke von C, falls gilt: $\forall x \in C : \; x \leq m$
- $m \in M$ heißt maximales Element, falls gilt: $\forall x \in M : \; m \leq x \;\to\; m = x$

Satz 20
Jeder Prä-Hilbertraum besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis. Es sei H ein Prä-Hilbertraum. Wir definieren $\mathcal{M} := \{M \mid M \text{ ist Orthonormalsystem}\}$ die Menge aller Orthonormalsysteme von H. Sie ist nicht leer, denn die leere Menge ist trivialerweise ein Orthonormalsystem.

Weiters bildet $\mathcal{M}$ mit der gewöhnlichen Mengeninklusion $\subset$ eine Halbordnung. Sei nun $\mathcal{C}$ eine Kette in $\mathcal{M}$ und sei $C := \bigcup\limits_{A\in\mathcal{C}} A$.

Für $u, v \in C$ gilt: $\exists A, B \in \mathcal{C}$: $u \in A$, $v \in B$. Nach der Eigenschaft von Ketten gilt $A \subset B$ oder $B \subset A$. Ohne Einschränkung gelte Ersteres. Dann gilt $u, v \in B$. Da B Orthonormalsystem ist, gilt klarerweise $\langle u, v\rangle = \begin{cases} 1 \text{ , falls } u = v \\ 0 \;\; \text{sonst} \end{cases}$. Da dies für beliebige $u, v \in C$ gilt, ist C selbst Orthonormalsystem.

Damit ist $C \in \mathcal{M}$ und nach Konstruktion gilt $\forall A \in \mathcal{C}$: $A \subset C$. Dies bedeutet gerade, dass C eine obere Schranke für die Kette $\mathcal{C}$ ist.

Mit diesem Wissen sind die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt. Dieses besagt nun, dass es ein maximales Element in $\mathcal{M}$ gibt, also ein Orthonormalsystem derart, dass jede Obermenge dieses Systems kein Orthonormalsystem sein kann. Also ist dieses maximale Element ein vollständiges Orthonormalsystem. □

Satz 21
Sei H Hilbertraum. Sei $(u_j)_{j\in J}$ Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(1) $(u_j)_{j\in J}$ ist vollständiges Orthonormalsystem

(2) $\mathcal{L}(\{u_j\}_{j\in J})$ liegt dicht in H ($\mathcal{L}(M)$ bezeichnet die Menge aller endlichen Linearkombinationen aus Elementen der Menge $M \subset H$)

(3) $\forall x \in H: \ x = \sum\limits_{j\in J} \hat{x}(j)u_j$ Damit gemeint ist:

Für $supp(\hat{x}) = \{j_1, j_2, \dots\}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - \sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| = 0$

(4) $\forall x \in H: \ \|x\|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2$ (Die Bessel'sche Ungleichung nimmt Gleichheit an)

(5) $\forall x, y \in H: \ \langle x, y\rangle = \sum\limits_{j\in J} \hat{x}(j)\overline{\hat{y}(j)}$ (Parseval'sche Identität)

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Wir zeigen $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$.
Sei also $V := \mathcal{L}(\{u_j\}_{j\in J})$ nicht dicht, damit gilt $\exists y \in H\backslash\overline{V}$. Es sei $x \in (\overline{V})^\perp$ die Projektion von y auf $(\overline{V})^\perp$. Aufgrund der Wahl von y gilt $x \neq 0$.

Für $\frac{x}{\|x\|}$ gilt: $\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle = 1$ und $\forall j \in J: \ \langle \frac{x}{\|x\|}, u_j\rangle = 0$. Also könnte dieser Vektor dem System dazugefügt werden und es bleibt immer noch ein Orthonormalsystem. Damit ist das ursprüngliche System nicht maximal.

(2) $\Rightarrow$ (3).
Die Dichtheit bedeutet, dass sich jedes $x \in H$ beliebig genau durch eine endliche Linearkombination von Elementen der Orthonormalbasis approximieren lässt:
$\forall x \in H \ \forall \epsilon > 0 \ \exists A(\epsilon) \subset J$ endliche Teilmenge , $\{\lambda_j\}_{j\in A(\epsilon)} \subset \mathbb{K}: \ \|x - \sum\limits_{j\in A(\epsilon)} \lambda_j u_j\| < \epsilon$.
Wir setzen $N(\epsilon) := \max\{l \in \mathbb{N} \mid j_l \in A(\epsilon)\}$ (wobei $supp(\hat{x}) = \{j_1, j_2, \dots\}$). $M := \mathcal{L}(\{u_j \mid j = 1, \dots N(\epsilon)\})$ ist abgeschlossen, da diese lineare Hülle durch endlich viele Vektoren erzeugt wird. Damit ist die Projektion von x auf M wohldefiniert. Nach unseren obigen Sätzen besitzt diese Projektion die Form $\sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} \hat{x}(j_l)u_{j_l}$ und nach der Infimumseigenschaft der Projektion gilt:
$\|x - \sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| \leq \|x - \sum\limits_{j\in A(\epsilon)} \lambda_j u_j\| < \epsilon$. Damit gilt: $\lim\limits_{e\to 0} \|x - \sum\limits_{l=1}^{N(\epsilon)} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| = 0$.
Sei nun $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ konkret festgelegte Nullfolge. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1. Fall. $N(\epsilon_n)$ bleibt beschränkt für $n \to \infty$, daher $\exists K \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ N(\epsilon_n) \leq K$. Es gilt also für fast alle ϵ_n:
$\|x - \sum\limits_{l=1}^{K} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| < \epsilon_n$, damit also $\|x - \sum\limits_{l=1}^{K} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| = 0$ und $x = \sum\limits_{l=1}^{K} \hat{x}(j_l)u_{j_l}$. Damit folgt offensichtlich die Behauptung.
- 2. Fall. $N(\epsilon_n)$ ist unbeschränkt. Es gibt also eine Teilfolge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(N(\epsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $k_n \to \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \| \sum\limits_{l=1}^{k_n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| = 0$. Berücksichtigen wir, dass die Folge $\|x - \sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\|$ in n monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, so sehen wir insgesamt, dass die Folge konvergent ist und eine Teilfolge ebendieser gegen 0 konvergiert. Damit also: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - \sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4).
Es gilt: $\left|\|x\| - \|\sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\|\right| \leq \|x - \sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\| \to 0$, also $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\|$
Also weiters:
$\|x\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\sum\limits_{l=1}^{n} \hat{x}(j_l)u_{j_l}\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{l=1}^{n} |\hat{x}(j_l)|^2 = \sum\limits_{l=1}^{\infty} |\hat{x}(j_l)|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\hat{x}(j)|^2$

(4) $\Rightarrow$ (5).
Es gilt für alle $x \in H$: $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle_{l^2(J)} = \sum\limits_{j\in J} |\hat{x}_j|^2$. Damit und mit der Linearität der Fouriertransformation folgt $\forall x, y \in H, \lambda \in \mathbb{C}$:
$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle_H = \langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle$
$=$
$\langle \widehat{x + \lambda y}, \widehat{x + \lambda y}\rangle_{l^2(J)} = \underbrace{\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle}_{=\langle x,x\rangle} + \lambda\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \overline{\lambda}\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle + |\lambda|^2 \underbrace{\langle \hat{y}, \hat{y}\rangle}_{=\langle y,y\rangle}$
$\Rightarrow \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle = \lambda\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \overline{\lambda}\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle \;\Rightarrow\; \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle x, y\rangle} = \lambda \cdot \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle}$

Mit $\lambda = 1$ folgt $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \mathrm{Re}(\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle)$ und mit $\lambda = i$ folgt $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) = \mathrm{Im}(\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle)$.
Also $\langle x, y\rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{l^2(J)} = \sum\limits_{j\in J} \hat{x}(j)\overline{\hat{y}(j)}$

(5) $\Rightarrow$ (1).
Indirekt sei $\{u_j\}_{j\in J}$ nicht vollständig. Dann $\exists u \in H :\ \|u\| = 1$ und $u \perp \{u_j\}_{j\in J}$. Dann gilt:
$1 = \langle u, u\rangle = \sum\limits_{j\in J} |\hat{u}(j)|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\langle u_j, u\rangle|^2 = 0$. Widerspruch. $\square$

Damit besitzen wir nun einige Kriterien, um vollständige Orthonormalsysteme nachzuweisen.

Beispiel 19
Die Menge der Fourierreihen bildet einen L^2-Raum: $H = L^2([-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}\lambda)$ (das Lebesgue-Maß wird mit dem Faktor $\frac{1}{2\pi}$ skaliert). Das Skalarprodukt besitzt also das Aussehen:
$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f \cdot \overline{g}\, d\lambda$
Definieren wir nun $u_k(x) = e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$, so bildet diese Familie $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

7 Fundamentale Sätze der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel werden einige weitere wichtige Sätze der Funktionalanalysis behandelt.

Satz 22 (Satz von Stone-Weierstraß)
Sei X kompakter metrischer Raum. Sei $\mathcal{C}(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ versehen mit der Supremumsnorm.

Sei $B \subset \mathcal{C}(X)$. Gelte:

(1) $\forall f, g \in B \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \ f \cdot g \in B \ \wedge \ \alpha f + \beta g \in B$

(2) $1 \in B$ (konstante Einsfunktion ist in B)

(3) $\forall x \neq y \in \mathbb{K} \ \exists b \in B: \ b(x) \neq b(y)$

Dann liegt B dicht in $\mathcal{C}(X)$ (bezüglich Supremumsnorm).

Satz 23 (Satz von Banach-Steinhaus)
Seien X, Y normierte Räume. Sei $\{T_i\}_{i \in I} \subset B(X, Y)$ eine Familie linearer und beschränkter Operatoren.

Wir betrachten die Aussagen:

(i) $\exists M < \infty \ \forall i \in I: \ \|T_i\| \leq M$

(ii) $\forall x \in X: \ \sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$

Dann gilt: Aus (i) folgt (ii). Ist X zusätzlich Banachraum, dann gilt auch die Umkehrung, also aus (ii) folgt (i).

Eine andere ähnliche Formulierung dieses Satzes (unter denselben Voraussetzungen mit X als Banachraum) lautet: Es gilt entweder (i) oder (ii):

(i) $\exists M < \infty \ \forall i \in I: \ \|T_i\| \leq M$

(ii) $\exists x \in X: \ \sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| = \infty$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$.
Sei $x \in X$ beliebig. O.B.d.A sei $x \neq 0$. Es gilt nach Annahme:
$\sup\limits_{i \in I} \frac{\|T_i x\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{i \in I} \sup\limits_{y \neq 0} \frac{\|T_i y\|}{\|y\|} = \sup\limits_{i \in I} \|T_i\| < \infty$. Also gilt insbesondere auch: $\|x\| \cdot \sup\limits_{i \in I} \frac{\|T_i x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$.

$(ii) \Rightarrow (i)$.
Annahme: X Banachraum. Wir definieren uns $\phi_i(x) := \|T_i x\|$ für $i \in T$ und $x \in X$. Diese Funktionen sind stetig, da die T_i stetig sind und die Norm stetig ist. Damit definieren wir uns: $\phi(x) := \sup\limits_{i \in I} \|T_i x\| = \sup\limits_{i \in I} \phi_i(x) \in [0, \infty]$.

Für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $V_n := \{x \in X \mid \phi(x) > n\} = \phi^{-1}((n, \infty])$. Diese Menge können wir umschreiben zu $\phi^{-1}((n, \infty]) = \bigcup\limits_{i \in I} \underbrace{\phi_i^{-1}((n, \infty))}_{\text{offen}}$. V_n ist also als Vereinigung offener Mengen offen.

Nach Konstruktion ergibt sich: $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} V_n \cup \{0\} = \bigcup\limits_{n \geq 0} \overline{V_n}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1) $\exists n \geq 0: \ \overline{V_n} \neq X$ (Eine Menge ist nicht dicht)

(2) $\forall n \geq 0: \ \overline{V_n} = X$ (Alle Mengen sind dicht)

1. Fall $\exists n \geq 0: \ \overline{V_n} \neq X \ \Rightarrow \ \overline{V_n}^C \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists x_0 \in \overline{V_n}^C$ Da diese Menge offen ist, finden wir ein $r > 0$, sodass $B(x_0, r) \cap \overline{V_n} = \emptyset$. Nach Definition von V_n gilt: $\forall x \in B(x_0, r): \ \phi(x_0 + x) \leq n$.

Für $z \in B(0,1)$ und alle $i \in I$ gilt nun:
$\|T_i z\| = \frac{1}{r} \cdot \|T_i(rz)\| = \frac{1}{r}\|T_i(x_0 + rz - x_0)\| \leq \frac{1}{r}\left(\|T_i(x_0 + rz)\| + \|T_i x_0\|\right) \leq \frac{2n}{r}$. Daraus folgt die Behauptung.

2. Fall $\forall n \geq 0 : \overline{V_n} = X$ Wir wollen zunächst zeigen, dass $\bigcap\limits_{n\geq 0} V_n \neq \emptyset$.

Indirekt sei $\bigcap\limits_{n\geq 0} V_n = \emptyset$. Da die V_n offen und dicht sind, sind ihre Komplemente V_n^C nirgends dicht. Dabei gilt aber, dass $X = \emptyset^C = \left(\bigcap\limits_{n\geq 0} V_n\right)^C = \bigcup\limits_{n\geq 0} V_n^C$. X lässt sich als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen darstellen und ist damit von 1. Kategorie. Dies ist ein Widerspruch zum Baire'schen Kategoriensatz, nach dem X als vollständiger (nach Annahme) metrischer Raum von 2. Kategorie sein müsste.

Damit gibt es ein Element $x \in \bigcap\limits_{n\geq 0} V_n$. Es folgt: $\phi(x) = \sup\limits_{i\in I} \|T_i x\| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also muss dieser Wert unendlich sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme (ii) des Satzes. Fall 2 kann folglich nicht eintreten. □

Beispiel 20
Wir wiederholen ein paar Begriffe der Fourier-Analysis.

Wir betrachten $X = \mathcal{C}_{per}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ die Menge aller 2π-periodischen stetigen Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dies liefert uns den Banachraum $(X, \|\cdot\|_\infty)$. Zu einer solchen Funktion $f \in X$ lässt sich die Fourier-Reihe bilden:
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ikx}$ wobei $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$

Die Partialsumme für $n \in \mathbb{N}$ ist $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$. Diese erhalten wir auch mittels Faltung von f und dem Dirchlet-Kern $D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$. Also $S_n(f)(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$

Weiterhin ist es möglich zu zeigen, dass $\|f - S_n(f)\|_{L^2([-\pi,\pi])} \to 0$. Wir wissen damit, dass $S_n(f)$ fast überall punktweise gegen f konvergiert. Nun können wir uns die Frage stellen, ob diese Funktionenfolge für alle f auch überall punktweise gegen f konvergiert.

Dazu definieren wir uns eine Familie von Operatoren. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n : X \to \mathbb{C}$ mit $T_n(f) := S_n(f)(0)$. Diese sind linear. Auch Beschränktheit lässt sich zeigen mit:
$|T_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)D_n(0-t)|dt \leq \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \|f\|_\infty \cdot \|D_n\|_1$.
Wir wollen weiterhin zeigen, dass tatsächlich $\|T_n\|_{B(X,\mathbb{C})} = \|D_n\|_1$. Verwenden wir die Funktion
$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } D_n(x) \geq 0 \\ -1 \text{ sonst} \end{cases}$ so ergibt sich $|T_n(g)| = \|D_1\|_1$. Diese Funktion ist aber nicht stetig. Jedoch ist es möglich, eine Folge stetiger Funktionen g_i zu konstruieren, die punktweise gegen die Funktion g konvergiert. Nach dem Satz der dominierten Konvergenz konvergiert die Folge der Integrale $|T_n(g_i)|$ gegen den Wert $|T_n(g)| = \|D_n\|_1$. Somit gilt $\|T_n\|_{B(X,\mathbb{C})} = \|D_n\|_1$.

Nun versuchen wir $\|D_n\|_1$ nach unten abzuschätzen.
$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\right| dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\frac{1}{2}t}\right| dt$
Substituiere $s = (n+\frac{1}{2})t$:
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \left|\frac{\sin(s)}{s}\right| dt > \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(s)}{s}\right| dt = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(s)|}{s} dt\right)$

$$> \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \underbrace{\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(s)|dt \right)}_{=2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus wissen wir über die Familie T_n, dass entweder (i) oder (ii) gilt:

(i) $\exists M < \infty \ \forall n \in \mathbb{N} : \ \|T_n\| \leq M$

(ii) $\exists f \in X : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| = \infty$

Wie wir aber gerade vorhin festgestellt haben kann (i) nicht gelten, da die Normen $\|T_n\| = \|D_n\|_1$ unbeschränkt sind. Es muss also eine Funktion $f \in X$ derart geben, dass $|T_n(f)| = |S_n(f)(0)|$ unbeschränkt ist, insbesondere divergiert. Damit kann für diese Funktion $S_n(f)(0)$ unmöglich gegen $f(0)$ konvergieren.

Es gibt also stetige komplexwertige Funktionen, deren Fourier-Reihe nicht überall punktweise gegen die Funktion konvergiert. Tatsächlich gilt sogar (ohne Beweis): Es gibt eine dichte G_δ-Menge $E \subset X$, sodass für alle $f \in E$ gilt: $\{x \in [-\pi, \pi] \mid |S_n(f)(x)| \to \infty\}$ ist dichte G_δ-Menge in $[-\pi, \pi]$.

Satz 24 (Satz von der offenen Abbildung)
Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in B(X, Y)$ eine lineare und beschränkte Abbildung, die zudem surjektiv ist. Dann gilt:

$\exists \delta > 0 \ \forall y \in Y$ mit $\|y\| \leq \delta \ \exists x \in X$ mit $\|x\| \leq 1 : \ T(x) = y$.

Beweis. Zunächst setzen wir $B_k := B_X(0, k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Da T surjektiv ist, gilt: $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T(B_k)$. Da Y vollständig ist, kann dies nach dem Baire'schen Kategoriensatz keine Vereinigung ausschließlich nirgends dichter Mengen sein. Es muss also für ein bestimmtes $K \in \mathbb{N}$ gelten, dass $T(B_K)$ nicht nirgends dicht ist. Aus einem obigen Lemma wissen wir damit: $W := Int(\ \overline{T(B_K)}\ ) \neq \emptyset$.

Sei $y_0 \in W$. Da W offen ist, gibt es ein $\eta > 0$ derart, dass $\forall y \in Y$ mit $\|y\| \leq \eta : \ y_0 + y \in W$. Da $W \subset \overline{T(B_K)}$ ist, können die beiden Elemente y_0 und $y_0 + y$ durch Folgen aus $T(B_K)$ angenähert werden. $\exists (a_n), (b_n) \in B_K^{\mathbb{N}} : \ T(a_n) \to y_0$ und $T(b_n) \to y_0 + y$. Für die Folge $(x_n) := (b_n - a_n)$ gilt, dass $T(x_n) \to y_0 + y - y_0 = y$ und $\|x_n\| \leq \|a_n\| - \|b_n\| \leq K + K = 2K$.

Soweit haben wir nun, dass jedes Element $y \in \overline{B}_Y(0, \eta)$ sich durch eine Folge aus $T(B_{2K})$ annähern lässt. Damit liegt $T(B_{2K})$ dicht in $\overline{B}_Y(0, \eta)$, also $\overline{B}_Y(0, \eta) \subset \overline{T(B_{2K})}$. Da T linear ist, lassen sich die Mengen noch skalieren: $\overline{B}_Y(0, \delta) \subset \overline{T(B_1)}$ wobei $\delta = \frac{\eta}{2K}$.

Sei $\epsilon > 0$ und $y \in Y \backslash \{0\}$ beliebig. Es gilt $y' := \frac{y}{\|y\|}\delta \in \overline{B}_Y(0, \delta)$. Mittels der zuvor sichergestellten Dichtheit lässt sich dieses Element annähern: $\exists v \in B_1 : \ \|T(v) - y'\| < \frac{\epsilon\delta}{\|y\|}$. Das Skalieren dieser Ungleichung mit $\frac{\|y\|}{\delta}$ liefert: $\|T(\underbrace{\frac{\|y\|}{\delta} v}_{=:x}) - y\| < \epsilon$. Damit erhalten wir: $\forall \epsilon > 0 \ \forall y \in Y \ \exists x \in X$ mit $\|x\| \leq \frac{\|y\|}{\delta} : \ \|T(x) - y\| < \epsilon$.

Durch einfachen Vorzeichenwechsel ($x = -x'$) erhalten wir auch:
$\forall \epsilon > 0 \ \forall y \in Y \ \exists x' \in X$ mit $\|x'\| \leq \frac{\|y\|}{\delta} : \ \|T(x') + y\| < \epsilon$.

Sei nun $y \in Y$ derart, dass $\|y\| \leq \delta$. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge in X und eine Folge in Y:

- $\exists x_1 \in X$ mit $\|x_1\| \leq \frac{\|y\|}{\delta} : \ \|T(x_1) - y\| < \frac{1}{4}\delta$ und $y_1 := T(x_1) - y$.
- $\exists x_2 \in X$ mit $\|x_2\| \leq \frac{\|y_1\|}{\delta} : \ \|T(x_2) + y_1\| < \frac{1}{8}\delta$ und $y_2 := T(x_2) + y_1 = T(x_2 + x_1) - y$.

Induktiv fortgesetzt:

- $\exists x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq \frac{\|y_{n-1}\|}{\delta} : \ \|T(x_n) + y_{n-1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}\delta$ und $y_n := T(x_n) - y_{n-1}$.

Weiterhin sei $s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$. Nach Konstruktion gilt nun: $\|x_n\| \leq \frac{\|y_{n-1}\|}{\delta} < \frac{1}{\delta}\frac{1}{2^n}\delta = \frac{1}{2^n}$, somit also $\|s_n - s_m\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$, da der Reihenrest einer konvergenten Reihe beliebig klein wird. Damit ist (s_n) Cauchy-Folge im Banachraum X und besitzt damit einen Grenzwert x. Für diesen gilt: $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 1$.

Schlussendlich gilt noch laut Konstruktion $\|T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - y\| = \|T(s_n) - y\| \to 0$. Also folgt, dass $T(s_n) \to y$ und mit der Stetigkeit von T, dass $T(s_n) \to T(x)$, womit gilt $T(x) = y$. □

Korollar 8
Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in B(X,Y)$ surjektiv. Dann gilt: $\forall U \subset X$ offen : $T(U)$ ist offen.

In Worten: Bilder offener Mengen sind offen.

Beweis. Es sei $U \subset X$ offen und $y_0 \in T(U)$ beliebig. Dann gibt es ein $x_0 \in U$, sodass $T(x_0) = y_0$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass $B_X(x_0, \epsilon) \subset U$. Sei $\delta > 0$ wie im letzten Satz bestimmt. Wir wollen zeigen, dass $B_Y(y_0, \frac{\epsilon \cdot \delta}{2}) \subset T(U)$.

Sei also $y \in B_Y(y_0, \frac{\epsilon\cdot\delta}{2})$. Damit folgt: $\frac{2}{\epsilon}(y - y_0) \in B_Y(0, \delta)$. Mit dem letzten Satz folgt $\exists \overline{x} \in \overline{B}_X(0,1)$: $T(\overline{x}) = \frac{2}{\epsilon}(y - y_0) \ \Rightarrow\ T(\frac{\epsilon}{2}\overline{x}) = y - y_0 = y - T(x_0) \ \Rightarrow\ y = T(\frac{\epsilon}{2}\overline{x} + x_0)$.
Dabei gilt $\frac{\epsilon}{2}\overline{x} + x_0 \in \overline{B}_X(x_0, \frac{\epsilon}{2}) \subset B_X(x_0, \epsilon) \subset U$ und somit $y \in T(U)$. □

Diese Folgerung zeigt also eine Art der Stetigkeitseigenschaft "in die andere Richtung". Dies zeigt auch das folgende (triviale) Korollar.

Korollar 9
Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in B(X,Y)$ bijektiv. Dann ist auch die Umkehrfunktion T^{-1} beschränkt.

Korollar 10
Sei $(X, \|\cdot\|_1)$ Banachraum und sei $\|\cdot\|_2$ eine weitere Norm auf X. Gelte $\exists M > 0\, \forall x \in X :\ \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$.

Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$, $x \mapsto x$, also die Identität zwischen den beiden (verschiedenen!) Banachräumen $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$. Diese ist linear und bijektiv. Mit der zusätzlichen Voraussetzung des Korollars sehen wir auch, dass $\|I\| \leq M < \infty$, also ist diese Funktion auch beschränkt. Mit dem vorherigen Korollar folgt, dass auch die Umkehrfunktion I^{-1} beschränkt ist und damit: $\forall x \in X :\ \|x\|_2 \leq \|I^{-1}\| \cdot \|x\|_1$. Die Normen sind also äquivalent. □

Definition 31
Seien X, Y normierte Räume. Sei $D \subset X$ ein Unterraum von X und sei $T : D \to Y$ eine lineare Abbildung (nicht zwangsweise beschränkt). Gelte weiters:

$\forall (x_n) \in D^{\mathbb{N}} :\ (x_n \to x) \wedge (T(x_n) \to y) \ \to\ (x \in D) \wedge (T(x) = y)$

Dann heißt die Abbildung T **abgeschlossen**.

Beispiel 21
Es seien $X = Y := \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ und es sei $D := \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}) \subset X$ die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Wir wissen, dass der Differentialoperator $\frac{d}{dx} : D \to Y$ linear (aber nicht beschränkt) ist.

Gilt für eine Funktionenfolge (f_n) aus D, dass $f_n \to f$ und $\frac{d}{dx} f_n \to g$ jeweils gleichmäßig (also in der

Supremumsnorm) konvergieren (insbesondere ist $f_n \to f$ punktweise konvergent) so wissen wir aus der reellen Analysis, dass $f \in D$ und $\frac{d}{dx} f = g$. In Worten: Wenn eine Folge differenzierbarer Funktionen und die Folge ihrer Ableitungen gleichmäßig konvergieren, dann existiert auch die Ableitung der Grenzfunktion und diese ist gleich der Grenzfunktion der Ableitungen. Dies bedeutet mit unseren Begriffen genau, dass der Differentialoperator abgeschlossen ist (obwohl er nicht stetig ist).

Abgeschlossenheit ist ein etwas schwächerer Begriff als Stetigkeit. Der Zusammenhang zwischen abgeschlossenen Abbildungen und abgeschlossenen Mengen wir mit dem nächsten Lemma klar.

Lemma 7
Seien X, Y normierte Räume. Sei $D \subset X$ ein Unterraum von X und sei $T : D \to Y$ linear. Dann gilt:

T ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Der Graph von T ist abgeschlossen

Begriffserklärungen:

- Der Graph von T ist die Menge $gr(T) := \{(x, T(x)) \mid x \in D\} \subset X \times Y$.
- Abgeschlossenheit einer Teilmenge von $X \times Y$ meint hier Abgeschlossenheit bezüglich der Produkttopologie.
- Die Produkttopologie wird beispielsweise durch die Norm $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ induziert.

Beweis. (*)
$\Rightarrow$.
Sei T abgeschlossen. Sei $((x_n, T(x_n)))$ eine Folge in $gr(T)$, die gegen ein Paar $(x, y) \in X \times Y$ konvergiert. Demnach gilt:
$\|x - x_n\|_X$ bzw. $\|y - T(x_n)\|_Y \leq \|x - x_n\|_X + \|y - T(x_n)\|_Y = \|(x, y) - (x_n, T(x_n))\|_{X\times Y} \to 0$.
Also gilt auch $x_n \to x$ und $T(x_n) \to y$. Mit der Abgeschlossenheit der Abbildung folgt daraus: $x \in D$ und $T(x) = y$. Also ist $(x, y) = (x, T(x)) \in gr(T)$.

$\Leftarrow$.
Sei der Graph von T: $gr(T)$ abgeschlossen. Es sei (x_n) eine Folge in D für die gilt: $x_n \to x$ und $T(x_n) \to y$. Dann ist $(x_n, T(x_n))$ Folge in $gr(T)$. Diese konvergiert gegen (x, y), da gilt:
$\|(x, y) - (x_n, T(x_n))\|_{X\times Y} \leq \|x - x_n\|_X + \|y - T(x_n)\|_Y \to 0$. Aus der Abgeschlossenheit des Graphen folgt, dass $(x, y) \in gr(T)$, und nach Definition des Graphen gilt $x \in D$ und $y = T(x)$. □

Lemma 8
Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, sei $D \subset X$ Unterraum und $T : D \to Y$ linear und abgeschlossen. Dann gilt:

(1) $\|\cdot\|_T$ mit $\|x\|_T := \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$ für $x \in D$ ist eine Norm auf D und $(D, \|\cdot\|_T)$ ist Banachraum

(2) $T : (D, \|\cdot\|_T) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist beschränkt

Beweis. (1).
Es ist leicht zu zeigen, dass $\|\cdot\|_T$ eine Norm auf D ist. Also zeigen wir noch, dass diese Norm einen vollständigen metrischen Raum induziert.

Sei also (x_n) eine Cauchy-Folge in $(D, \|\cdot\|_T)$. Es gilt also $\|x_n - x_m\|_X + \|T(x_n - x_m)\|_Y = \|x_n - x_m\|_T \to 0$. Damit ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(T(x_n))$ eine Cauchy-Folge in $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Diese Räume sind vollständig, also existieren zu diesen Cauchy-Folgen Grenzwerte $x_n \to x \in X$ und $T(x_n) \to y \in Y$. Da T abgeschlossen ist folgt $x \in D$ und $T(x) = y$.

Damit folgt: $\|x - x_n\|_T = \|x - x_n\|_X + \|y - T(x_n)\|_Y \to 0$ und x ist somit der gesuchte Grenzwert.

(2).
$\|T(x)\|_Y = \|x\|_T - \|x\|_X \leq \|x\|_T$. Also ist die Abbildung bezüglich der neuen Norm beschränkt. □

Satz 25 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ linear. Dann gilt:
T ist stetig $\Leftrightarrow$ T ist abgeschlossen

Beweis. $\Rightarrow$.
Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to x$. $x \in X$ ist klar und aus der Stetigkeit folgt sofort $T(x_n) \to T(x) = y$. Damit ist T abgeschlossen.

$\Leftarrow$.
Wir wissen nach Konstruktion: $\|x\|_X \leq \|x\|_T$. Da X und Y Banachräume sind, folgt aus einem früheren Lemma, dass die beiden Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_T$ äquivalent sind. Aus dem vorherigen Lemma wissen wir: $T : (X, \|\cdot\|_T) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist beschränkt, also stetig. Daraus folgt mit der Normäquivalenz automatisch, dass die Funktion bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$ stetig ist. $\square$

Satz 26 (Satz von Hahn-Banach)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Sei $M \subset X$ ein Unterraum von X. Sei $T \in B(M, \mathbb{K})$.

Dann gibt es ein $\tilde{T} \in B(X, \mathbb{K})$ derart, dass gilt $\tilde{T}|_M = T$ und $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

In Worten: Zu jedem linearen und beschränkten Funktional auf einem Unterraum gibt es eine normerhaltende Fortsetzung auf den gesamten Raum.

Beweis. Wir zeigen den Satz in 3 Schritten.

1. Schritt
Es sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei $M \subsetneq X$, sonst stellt sich nicht die Frage einer Fortsetzung. Dann $\exists x_0 \in X \backslash M$. Wir zeigen nun, dass es eine normerhaltende Fortsetzung von T auf den Unterraum $\tilde{M} := M + \mathcal{L}\{x_0\}$ gibt. Dazu halten wir fest, dass für ein gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Funktional $\tilde{T} : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist, wenn angesetzt wird: Für $y + \lambda x_0 \in \tilde{M}$ ist $\tilde{T}(y + \lambda x_0) = T(y) + \lambda\alpha$. Es verbleibt die Aufgabe zu zeigen, dass ein α derart existiert, dass die Norm erhalten bleibt: $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Es soll also gelten: $\forall y \in M, \lambda \in \mathbb{R} : \ |T(y) + \lambda\alpha| \leq \|T\| \cdot \|y + \lambda x_0\|$. Mit der Substitution $w = -\lambda y$ erhalten wir die äquivalente Aussage $\forall w \in M : \ |T(w) - \alpha| \leq \|T\| \cdot \|x_0 - w\|$
$\Leftrightarrow \ \forall w \in M : \ T(w) - \|T\| \cdot \|x_0 - w\| \leq \alpha \leq T(w) + \|T\| \cdot \|x_0 - w\|$
Ein α mit der gewünschten Eigenschaft existiert also, falls die Ungleichung $T(w) - \|T\| \cdot \|x_0 - w\| \leq T(v) + \|T\| \cdot \|x_0 - v\|$ für alle $w, v \in M$ erfüllt ist.

Man setzt an für beliebige $w, v \in M$:
$T(w) - T(v) \leq |T(w) - T(v)| = |T(w - v)| \leq \|T\|\|w - v\| \leq \|T\|\|x_0 - w\| + \|T\|\|x_0 - v\|$
$\Leftrightarrow \ T(w) - \|T\| \cdot \|x_0 - w\| \leq T(v) + \|T\| \cdot \|x_0 - v\|$ was genau die gewünschte Ungleichung ist. Damit ist gezeigt, dass es eine normerhaltende Fortsetzung von T auf den Unterraum $M + \mathcal{L}\{x_0\}$ gibt.

2. Schritt
Nun kommt wieder das Lemma von Zorn zum Einsatz. Es sei $\mathcal{E}:= \{(M', T') \mid M \subset M' \subset X$ Unterraum, $T'|_M = T, \|T'\| = \|T\|\}$, versehen mit der Halbordnung $(M', T') \leq (M'', T'') \ :\Leftrightarrow \ M' \subset M''$ und $T''|_{M'} = T'$. Es sei $\mathcal{C}= \{(M_j, T_j) \mid j \in J\} \subset \mathcal{E}$ eine Kette.

Wir definieren $\tilde{M} := \bigcup_{j \in J} M_j$. Für ein $x \in \tilde{M}$ definieren wir den Wert eines Funktionals $\tilde{T}(x) = T_j(x)$, wobei $j \in J$ derart, dass $x \in M_j$. Dieses Funktional ist wohldefiniert, denn falls $x \in M_i, M_j$, dann gilt nach Eigenschaft der Kette $(M_i, T_i) \leq (M_j, T_j)$ oder $(M_i, T_i) \geq (M_j, T_j)$. O.B.d.A gelte Ersteres, also insbesondere ist $x \in M_i \subset M_j$ und $T_j|_{M_i} = T_i$ und folglich $T_j(x) = T_i(x) = \tilde{T}(x)$ wohldefiniert. Mit analogen Argumenten ist $\tilde{T}$ linear und es gilt $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Wie man leicht feststellt bildet $(\tilde{M}, \tilde{T})$ eine obere Schranke der Kette.

Aus dem Lemma von Zorn folgt, dass es maximale Elemente gibt. Sei $(\tilde{M}, \tilde{T})$ ein solches maximales Element. Es muss gelten, dass $\tilde{M} = X$, denn sonst wäre $\tilde{M} \subsetneq X$ und wie im 1. Schritt beschrieben ließe sich $\tilde{T}$ noch weiter normerhaltend fortsetzen, dies wäre ein Widerspruch zur Maximalität von $(\tilde{M}, \tilde{T})$. Daraus folgt, dass $\tilde{T}$ wie gewünscht eine normerhaltende Fortsetzung von T auf ganz X ist.

3. Schritt
Zuletzt erweitern wir die Gültigkeit des Satzes auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es sei X also ein normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dies ist gleichzeitig ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, wenn man die Vektormultiplikation auf $\mathbb{R}$ einschränkt.

Sei $T : M \to \mathbb{C}$. Dieses Funktional kann man in Real- und Imaginärteil zerlegen: $T(x) = U(x) + iV(x)$, wobei $U, V : M \to \mathbb{R}$ reell linear sind. Es folgt: $V(x) = \operatorname{Im}(T(x)) = -\operatorname{Re}(iT(x)) = -\operatorname{Re}(T(ix)) = -U(ix)$. Das Funktional T besitzt also die Darstellung $T(x) = U(x) - iU(ix)$.

Umgekehrt sei $U : X \to \mathbb{R}$ reell linear, es gelte also lediglich $\forall x, y \in X\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :\ U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y)$. Wir können zeigen, dass $T : X \to \mathbb{C}$ definiert durch $T(x) = U(x) - iU(ix)$ komplex linear ist:
$T(x + y) = U(x + y) - iU(ix + iy) = U(x) - iU(ix) + U(y) - iU(iy) = T(x) + T(y)$
Für $\alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = U(\alpha x) - iU(\alpha(ix)) = \alpha(U(x) - iU(ix)) = \alpha T(x)$
$T(ix) = U(ix) - iU(iix) = U(ix) - iU(-x) = U(ix) + iU(x) = i(U(x) - iU(ix)) = iT(x)$
Zusammengefasst ist T damit komplex linear.

Ist $T(x) = U(x) - iU(ix)$ gegeben, so gilt $\|U\| = \|T\|$, denn einerseits
$\forall x \in X\ |U(x)| = |\operatorname{Re}(T(x))| \leq |T(x)|$, also $\|U\| \leq \|T\|$
Andererseits sei definiert $\operatorname{sgn}(z) := \frac{z}{|z|}$ für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{sgn}(0) := 0$.
Mit $\alpha := \frac{1}{\operatorname{sgn}(T(x))}$ gilt für $x \neq 0$, dass $|T(x)| = \alpha \cdot T(x) = T(\alpha x) \overset{\in\mathbb{R}}{=} U(\alpha x) \leq \|U\| \cdot |\alpha| \cdot \|x\| = \|U\| \cdot \|x\|$, damit also $\|T\| \leq \|U\|$.

Jetzt führen wir Obiges zusammen. Es sei $T :\ M \to \mathbb{C}$ (komplex) linear und beschränkt mit $T(x) = U(x) - iU(x)$. $U : M \to \mathbb{R}$ ist reell linear und beschränkt da $\|T\| = \|U\|$ ist. Nach dem 2. Schritt gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{U} :\ X \to \mathbb{R}$, welche wiederum ein komplex lineares Funktional $\tilde{T} :\ X \to \mathbb{R}$ erzeugt mit $\tilde{T}(x) = \tilde{U}(x) - i\tilde{U}(ix)$. Dieses ist auch beschränkt mit $\|\tilde{T}\| = \|\tilde{U}\| = \|U\| = \|T\|$. So ist $\tilde{T}$ eine normerhaltende Fortsetzung von T auf ganz X. □

Beispiel 22
Wir betrachten den Cesaro-Limes. Wie aus der Analysis bekannt ist für eine reelle Folge (x_n) der Cesaro-Limes definiert durch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, falls dieser Grenzwert existiert (wenn er existiert, heißt die Folge (x_n) Cesaro-summierbar). Man kann beispielsweise mit einfachen Mitteln zeigen, dass jede konvergente Folge Cesaro-summierbar und ihr Grenzwert gleich dem Cesaro-Limes ist.

Es sei $l^\infty(\mathbb{R}) = l^\infty$ die Menge aller beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$.
Es sei $\mathcal{M} := \{(x_n) \in l^\infty \mid \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \text{ existiert } \}$ die Menge aller Cesaro-summierbaren Folgen, dies ist offensichtlich ein Unterraum. $F :\ \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $(x_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ sei das lineare Funktional, das eine Folge auf seinen Cesaro-Limes abbildet. Weiters:
$|F((x_n))| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} \|(x_n)\|_\infty = \|(x_n)\|_\infty$ und mit $|F((1)_{n\in\mathbb{N}})| = 1$ erhält man: $\|F\| = 1$.

Der Satz von Hahn-Banach liefert uns eine Möglichkeit, diesen Limes zu verallgemeinern und ihn also auf alle beschränkten Folgen zu erweitern. Wir definieren B-lim : $l^\infty \to \mathbb{R}$ als eine normerhaltende Fortsetzung von F. Man bezeichnet B-lim als Banach-Limes.

Der Banach-Limes besitzt einige ähnliche Eigenschaften wie der gewöhnliche Limes.

(1) B-lim ist linear

(2) $\text{B-lim}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \text{B-lim}((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$

(3) $\text{B-lim}((x_n)) \geq 0$, falls fast alle $x_n \geq 0$

(4) $\text{B-lim}((x_n)) \leq \text{B-lim}((y_n))$, falls $x_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

(5) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \text{B-lim}((x_n)) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Begründung:

(1) Klar

(2) $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, denn $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = \frac{x_{n+1}-x_1}{n} \to 0$. Damit $0 = \text{B-lim}((x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \text{B-lim}((x_{n+1}) - (x_n)) = \text{B-lim}((x_{n+1})) - \text{B-lim}((x_n))$ woraus die Behauptung folgt.

(3) O.B.d.A. gelte $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sonst wende Punkt (2) induktiv an, bis diese Eigenschaft für alle Indizes gilt. Es sei $M := \|(x_n)\|_\infty$. Es ist $(M)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Dann gilt:
$\text{B-lim}((M - x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \underbrace{\|\,\text{B-lim}\,\|}_{=\|F\|=1} \cdot \|(M - x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} M - x_n \leq M$, da $x_n \geq 0$ für alle n.
$\text{B-lim}((M - x_n)) = \text{B-lim}((M)) - \text{B-lim}((x_n)) = M - \text{B-lim}((x_n))$.
Zusammengefasst: $M - \text{B-lim}((x_n)) \leq M \;\Leftrightarrow\; 0 \leq -\text{B-lim}((x_n)) \;\Leftrightarrow\; \text{B-lim}((x_n)) \geq 0$

(4) Folgt sofort aus Punkt (3).

(5) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n - \epsilon \leq x_{n_\epsilon} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \epsilon$. Wende auf die gesamte Ungleichung den Banach-Limes an, die Ungleichungen bleiben nach Punkt (4) erhalten:
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n - \epsilon \leq \text{B-lim}((x_n)) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \epsilon$. Für $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

So vielversprechend dieser Banach-Limes auch sein mag, muss man einige Probleme in Kauf nehmen. Erstens ist zur Konstruktion der Satz von Hahn-Banach, also infolgedessen das Auswahlaxiom notwendig. Wir besitzen also keine Zuordnungsvorschrift für dieses Funktional, wir wissen nur, dass es existiert. Zweitens ist nach dem Satz von Hahn-Banach die Fortsetzung nicht eindeutig. Wenn wir also von "dem" Banach-Limes sprechen, sprechen wir in Wahrheit von "einem" Banach-Limes, da es mehrere normerhaltende Fortsetzungen des Cesaro-Limes gibt. Man kann aber zumindest sagen, dass alle Banach-Limiten die oben behandelten Eigenschaften besitzen.

Beispiel 23
Für $A \subset \mathbb{N}$ interessiert uns der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\{k\in A \mid k\leq n\}|}{n}$, der anschaulich beschreibt, wie " dicht" die Menge A in $\mathbb{N}$ liegt. Für einige Teilmengen A kann dieser Grenzwert einfach berechnet werden, so ist er beispielsweise 0, falls A endlich ist, und 1, falls $A = \mathbb{N}$ ist. Der Grenzwert konvergiert jedoch nicht für alle Teilmengen. Dafür kann man den vorhin definierten Banach-Limes anwenden.
$m(A) := \text{B-lim}(\frac{|\{k\in A \mid k\leq n\}|}{n})$
Diese Funktion erinnert an ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn es gilt $m(\mathbb{N}) = 1$, $m(\emptyset) = 0$, und $m(A\cup B) = m(A) + m(B)$ falls A, B disjunkt sind, oder auch $m(A + 1) = m(A)$. Es gilt jedoch nicht σ-Additivität.

8 Dualräume

Definition 32
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

$X^\star := B(X, \mathbb{K})$ heißt der **Dualraum** von X.

Der Dualraum von X ist also die Menge der linearen und beschränkten Funktionale von X. Wie schon im Kapitel Lineare Operatoren erwähnt bildet der Dualraum mit der Operator-Norm wieder einen normierten Raum. Zudem ist er auch vollständig, da $\mathbb{K}$ vollständig ist.

Im Kapitel Hilberträume haben wir gesehen, dass ein Hilbertraum seinem Dualraum entspricht. Man kann jedes Element aus dem Dualraum durch ein Element aus dem Hilbertraum angeben und umgekehrt, und dabei bleibt sogar die Norm erhalten.

Häufig identifiziert man auch die Elemente des Dualraums mit den Elementen aus H, also setzt man im gewissen Sinne $H = H^\star$. Diese Schreibweise ist üblich, aber dennoch mit Vorsicht zu genießen, da es sich bei den Räumen H und $H^\star$ streng genommen immer noch um zwei verschiedene Räume handelt.

In der gängigen Literatur wird der Sachverhalt "$H = H^\star$" mit sogenannten isometrischen Isomorphismen präziser formuliert. Der Einfachheit halber begnügenwir uns damit, eine normerhaltende eindeutige Zuordnung zwischen H und $H^\star$ festzustellen.

Wir können uns auch überlegen, ob wir auch die Dualräume gewisser Banachräume auf ähnliche Weise charakterisieren können.

Satz 27
Für $p, q > 1$ zueinander konjugiert (also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) gilt $(l^p)^\star = l^q$.

Beweis. Es sei $K := \{T : l^p \to \mathbb{C} \mid \exists (y_n) \in l^q\ \forall (x_n) \in l^p :\ T(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot x_k\}$.

Wir zeigen, dass $K = (l^p)^\star$.

$K \subset (l^p)^\star$.
Sei $T \in K$. Das Funktional ist offensichtlich linear. Es gilt für eine beliebige Folge $(x_n) \in l^p$ mit der Hölder-Ungleichung: $|T(x_n)| = |\sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot x_k| \leq \|(y_n)\|_q \cdot \|(x_n)\|_p$. Desweiteren wissen wir, dass die Hölder-Ungleichung mit einer geeigneten Folge Gleichheit annimmt. Also ist das Funktional auch beschränkt mit $\|T\| = \|(y_n)\|_q$ und $T \in (l^p)^\star$

$K \supset (l^p)^\star$.
Sei $T \in (l^p)^\star$. Sei $(x_n) \in l^p$, weiters sei
$x^N = (x_n^N)_{n \in \mathbb{N}} := (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ und $e^N := (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{N-te Stelle}}, 0 \ldots)$
Mit der Linearität und Stetigkeit von T gilt
$T((x_n)) = \lim_{N\to\infty} T(x^N) = \lim_{N\to\infty} T(\sum_{k=1}^{N} x_k \cdot e^k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot T(e^k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot T(e^k)$
T ist also in K, wenn wir zeigen können, dass $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (T(e^k))_{k\in\mathbb{N}} \in l^q$. Dazu setzen wir
$w^N := \sum_{\substack{k=1\\ y_k\neq 0}}^{N} \frac{|y_k|^q}{y_k} e^k$, als endliche Folge ist trivialerweise $w^N \in l^p$ mit $\|w^N\|_p^p = \sum_{\substack{k=1\\ y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^{(q-1)p} = \sum_{\substack{k=1\\ y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q$.

Weiterhin ist auch $T(w^N) = \sum_{\substack{k=1\\ y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q$. Ist T o.B.d.A. ungleich dem Nullfunktional, so gilt für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$, dass $\|w^N\|_p > 0$, insbesondere $\neq 0$ ist.

$|T(w^N)| = |\sum\limits_{\substack{k=1\\y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q| \leq \|T\| \cdot \|w^N\|_p$. Auf beiden Seiten durch $\|w^N\|_p \neq 0$ dividiert ergibt dann

$$\frac{|T(w^N)|}{\|w^N\|_p} = \frac{\sum\limits_{\substack{k=1\\y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q}{\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum\limits_{\substack{k=1\\y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{\substack{k=1\\y_k\neq 0}}^{N} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(y_n^N)\|_q \leq \|T\| < \infty \text{ für fast alle } N \in \mathbb{N}$$

und somit auch für $N \to \infty$: $\|(y_n)\|_q < \infty$, also $(y_n) \in l^q$. □

Aus diesem Satz erhalten wir auch nochmals, dass der Hilbertraum l^2 seinem Dualraum $(l^2)^\star$ gleicht. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ deckt dieser Satz nicht ab. Es lässt sich jedoch auch zeigen, dass $(l^1)^\star = l^\infty$ ist, allerdings gilt es nicht andersrum: $(l^\infty)^\star \neq l^1$.

Beispiel 24
Wir betrachten die Folgenräume über $\mathbb{R}$. Der (bzw. ein) Banach-Limes ist ein lineares und beschränktes Funktional auf l^∞, genauer also ein Element aus dem Dualraum $(l^\infty)^\star$. Es kann keine Folge $(y_n) \in l^1$ geben, dass $\forall (x_n) \in l^\infty \text{ B-lim}(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Denn gäbe es eine solche, so ist sie insbesondere eine Nullfolge und $0 = \text{B-lim}(y_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k y_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$. Demnach müsste (y_n) die konstante Nullfolge sein und der Banach-Limes also das Nullfunktional, was klarerweise nicht der Fall ist.

Dies ist kein Beweis dafür, dass $(l^\infty)^\star \ncong l^1$. Es zeigt aber, dass der obige Ansatz, die Funktionale über Reihen zu charakterisieren, in diesem Fall versagt.

Beispiel 25
Zunächst einige Begriffe:

Es sei $m : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben. Diese Funktion heißt von beschränkter Variation, falls
$\|m\|_{BV} := \sup\limits_{P} \sum\limits_{i=1}^{n} |m(t_i) - m(t_{i-1})| < \infty$,
(dieser Wert heißt die totale Variation von m) wobei P die Menge aller endlichen Partitionen des Intervalls $[0,1]$ bezeichnet, also $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = 1$ (wobei $n \in \mathbb{N}$ abhängig von der Partition ist).

Weiters betrachten wir das Stieltjes-Integral. Dieses ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Intergals: Für $f \in \mathcal{C}[0,1]$ und $m \in BV[0,1]$ ist
$\int_0^1 f \; dm := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f(t_i^n)\left(m(t_i^n) - m(t_{i-1}^n)\right)$, wobei $0 = t_1^n \leq \cdots \leq t_{k_n}^n = 1$ eine Folge von Partitionen bildet, deren Feinheit gegen 0 geht (siehe Analysis II). Für $m(t) = t$ erhalten wir das uns bekannte gewöhnliche Riemann-Integral.

Wir wollen nun begründen, dass $\mathcal{C}[0,1]^\star$ durch $BV[0,1]$ repräsentiert werden kann.
Hinweis: Genauer gilt, dass $\mathcal{C}[0,1]^\star$ " gleich " der Menge der signierten Maße auf dem Intervall $[0,1]$ ist. Dabei legt jede Funktion $m \in BV[0,1]$ ein signiertes Maß fest.

Wir setzen für $m \in BV[0,1]$: $F_m : \begin{cases} \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f \; dm \end{cases}$

Nach den Eigenschaften des Stieltjes-Integrals ist jedes Funktional F_m wohldefiniert und linear. Beschränktheit folgt aus der Abschätzung:
$\left|\int f \; dm\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|m\|_{BV}$, also $\|F_m\| \leq \|m\|_{BV}$.

Es sei $F \in (\mathcal{C}[0,1])^\star$. Wir wollen eine Funktion $m \in BV[0,1]$ derart konstruieren, dass $F_m = F$.
Dazu stellen wir fest, dass $\mathcal{C}[0,1]$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^\infty[0,1]$ ist (wobei beide Räume auch mit derselben Norm versehen sind). Hahn-Banach liefert uns eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{F}$ von F auf alle beschränkten Funktionen. Damit ist es uns möglich zu definieren: $m(t) := \tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,t]})$, wobei $\mathbb{1}$ die

Indikatorfunktion bezeichnet.

$m \in BV[0,1]$.
Wir stellen fest, dass für eine beliebige Partition mit $0 = t_1 \leq \cdots \leq t_n = 1$ gilt:
$\sum\limits_{i=1}^{n} |m(t_i) - m(t_{i-1})| = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{sgn}(m(t_i) - m(t_{i-1}))}_{=:\epsilon_i} \cdot (m(t_i) - m(t_{i-1})) = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot (m(t_i) - m(t_{i-1}))$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot (\tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,t_i]}) - \tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,t_{i-1}]})) = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot \tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,t_i]} - \mathbb{1}_{[0,t_{i-1}]}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot \tilde{F}(\mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}) = \tilde{F}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}\right)$
$\leq \|\tilde{F}\| \cdot \| \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}\|_\infty = \|\tilde{F}\| = \|F\|$.
Diese Abschätzung ist unabhängig von der Partition, also gilt insbesondere $\|m\|_{BV} \leq \|F\|$

$F_m = F$.
Es sei $f \in \mathcal{C}[0,1]$ beliebig. Die Folge $f_n := f(0) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}$ konvergiert gleichmäßig gegen f (also in L^∞). Damit folgt:
$F(f) = \tilde{F}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}(f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}\left(f(0) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}\right)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} f(0) \cdot \underbrace{\tilde{F}(\mathbb{1}_{\{0\}})}_{=0} + \sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \tilde{F}(\mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \left(\tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,\frac{i}{n}]}) - \tilde{F}(\mathbb{1}_{[0,\frac{i-1}{n}]})\right)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \left(m(\frac{i}{n}) - m(\frac{i-1}{n})\right) = \int_0^1 f\ dm = F_m(f)$ nach Definition des Stieltjes-Integrals.
Damit folgt wie gewünscht $F = F_m$.

Betrachten wir die Abschätzungen, die wir zuvor erhalten haben: $\|m\|_{BV} \leq \|F\|$ und $\|F_m\| \leq \|m\|_{BV}$, so folgt auch $\|F_m\| = \|m\|_{BV}$.

Definition 33
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. $(X^\star)^\star = X^{\star\star}$ heißt der **Bidualraum** von X.

Einfache Beispiele für Elemente des Bidualraumes liefert die sogenannte kanonische Einbettung:

Beispiel 26
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x \in X$ beliebig. Wir definieren: $F_x : X^\star \to \mathbb{K}, T \mapsto T(x)$. In Worten ausgedrückt nimmt F_x ein lineares und beschränktes Funktional als Argument und wertet es im fixierten Punkt x aus. Wir wollen zeigen: $F_x \in X^{\star\star}$ und $\|F_x\| = \|x\|$.

Diese Abbildung ist offensichtlich linear. Um die Beschränktheit zu zeigen, setzen wir in die Definition der Operator-Norm ein:
$\|F_x\| = \sup\limits_{\substack{T\in X^\star \\ T\neq 0}} \frac{|F_x(T)|}{\|T\|} = \sup\limits_{\substack{T\in X^\star \\ T\neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|T\|} \leq \sup\limits_{\substack{T\in X^\star \\ T\neq 0}} \frac{\|T\|\cdot\|x\|}{\|T\|} = \|x\|$.

Um Gleichheit zu zeigen benötigen wir den Satz von Hahn-Banach. Es sei o.B.d.A. $x \neq 0$ und $M := \mathcal{L}(\{x\})$. Dann definieren wir: $\tilde{T} : M \to \mathbb{K},\ \lambda \cdot x \mapsto \lambda \cdot \|x\|$. $\tilde{T}$ ist offensichtlich linear und beschränkt mit $\|\tilde{T}\| = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Erweiterung auf den ganzen Raum: $T \in X^\star$ mit $\|T\| = \|\tilde{T}\| = 1$ und $T|_M = \tilde{T}$. Mit diesem Funktional T gilt $|T(x)| = \|x\| = \|T\| \cdot \|x\|$, also nimmt obige Ungleichung Gleichheit an: $\|F_x\| = \|x\|$.

Verallgemeinert erhalten wir damit eine Funktion: $F : X \to X^{\star\star},\ x \mapsto F_x$. Diese ist linear (trivial), erhält die Norm (siehe zuvor) und ist injektiv, denn für $x, y \in X, x \neq y$ gibt es ein Funktional $T \in X^\star$ mit $T(x) \neq T(y)$ (Übungsaufgabe, ähnlich zur vorherigen Anwendung von Hahn-Banach), woraus folgt $F_x(T) = T(x) \neq T(y) = F_y(T)$ und damit $F_x \neq F_y$.

Definition 34
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Der wie vorhin definierte injektive, normerhaltende Homomorphismus $F : X \to X^{\star\star},\ x \mapsto F_x$ heißt die **kanonische Einbettung** von X in $X^{\star\star}$.

Definition 35
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Wir nennen X **reflexiv**, falls er " gleich " seinem Bidualraum $X^{\star\star}$ ist.

Hinweis: Die übliche Literatur verwendet eine andere Definition: X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung surjektiv ist. Ist ein normierter Raum dieser Definition nach reflexiv bedeutet das insbesondere, dass er isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum ist: $X \cong X^{\star\star}$. Umgekehrt gilt das im Allgemeinen nicht; Es ist möglich, dass $X \cong X^{\star\star}$ gilt, aber die kanonische Einbettung nicht surjektiv und X damit nicht reflexiv ist.

Beispiel 27
Einige Beispiele:

- Jeder Hilbertraum H ist reflexiv. Da jeder Hilbertraum zu seinem Dualraum isometrisch isomorph ist, folgt sofort: $H = H^\star = H^{\star\star}$
- Für $1 < p < \infty$ ist l^p reflexiv, da $(l^p)^\star = l^q$ und somit $(l^p)^{\star\star} = (l^q)^\star \cong l^p$
- l^1 ist nicht reflexiv, denn wie oben angemerkt ist zwar $(l^1)^\star = l^\infty$, aber $l^1 \neq (l^\infty)^\star$, somit $(l^1)^{\star\star} = (l^\infty)^\star \neq l^1$

Hinweis: Obiges gilt auch für die übliche Definition von Reflexivität (siehe Definition). Es wäre jeweils nachzuprüfen, ob die kanonische Einbettung surjektiv ist.

9 Adjungierte Abbildungen

Definition 36
Seien X, Y normierte Räume. Sei $T \in B(X,Y)$.

Dann heißt $T^\star : \begin{cases} Y^\star \to X^\star \\ G \mapsto G \circ T \end{cases}$ der **adjungierte Operator** von T.

Dabei bezeichnet $\circ$ die gewöhnliche Hintereinanderausführung von Funktionen. Der adjungierte Operator ist wohldefiniert, da jede Hintereinanderausführung linearer und beschränkter Funktionen wieder linear und beschränkt ist.

Laut Definition ist: $\forall x \in X: \ G \circ T(x) = G(T(x)) = T^\star(G)(x)$. Anschaulich liefert uns der adjungierte Operator also eine Möglichkeit T in der Notation " auf die andere Seite zu bringen ". Dies äußert sich auch in einer weiteren Schreibweise:

Für einen beliebigen normierten Raum X, ein Funktional $F \in X^\star$ und $x \in X$ schreibt man $\langle F, x\rangle := F(x)$ (Achtung: Dies ist nicht mit einem Skalarprodukt zu verwechseln!). In dieser Notation lässt sich die vorherige Gleichung schreiben als: $G(T(x)) = \langle \underbrace{G}_{\in Y^\star}, \underbrace{T(x)}_{\in Y}\rangle = \langle \underbrace{T^\star(G)}_{\in X^\star}, \underbrace{x}_{\in X}\rangle = T^\star(G)(x)$.

Diese Schreibweise steht in einem gewissen Zusammenhang mit Skalarprodukten. Handelt es sich bei X um einen (Prä)-Hilbertraum, so lässt sich jedes lineare und beschränkte Funktional $F \in X^\star$ als Skalarprodukt mit einem Element $f \in X$ beschreiben ($F : x \mapsto \langle f, x\rangle$).
In diesem Sinne ist dann $\underbrace{\langle F, x\rangle}_{\text{obige neue Notation}} = \underbrace{\langle f, x\rangle}_{\text{Skalarprodukt von X}}$

Satz 28
Wie zuvor seien X, Y normierte Räume und $T \in B(X,Y)$. Der adjungierte Operator $T^\star$ von T ist linear und beschränkt mit $\|T^\star\| = \|T\|$.

Beweis. Seien $G, H \in Y^\star$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann ist $T^\star(\lambda G + \mu H) = (\lambda G + \mu H) \circ T = \lambda G \circ T + \mu H \circ T = \lambda T^\star(G) + \mu T^\star(H)$.

Für die Beschränktheit verwenden wir folgende Erkenntnis aus der Übung: Für eine Hintereinanderausführung zweier linearer und beschränkter Operatoren $S \circ T$ gilt $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

Also setzt man an:
$\|T^\star\| = \sup\limits_{\substack{G \in Y^\star \\ G \neq 0}} \frac{\|T^\star(G)\|}{\|G\|} = \sup\limits_{\substack{G \in Y^\star \\ G \neq 0}} \frac{\|G \circ T\|}{\|G\|} \leq \sup\limits_{\substack{G \in Y^\star \\ G \neq 0}} \frac{\|G\| \cdot \|T\|}{\|G\|} = \|T\|$. Damit gilt schon einmal $\|T^\star\| \leq \|T\|$.

Weiters sei $x \in X$ beliebig gewählt, o.B.d.A derart, dass $T(x) \neq 0$. Es sei $y := \frac{T(x)}{\|T(x)\|}$. Mit dem Satz von Hahn-Banach wissen wir (siehe Übung): $\exists G \in Y^\star : \|G\| = 1$ und $G(y) = \|y\| = 1$.
Aus dieser Konstruktion folgt $G(T(x)) = \|T(x)\| \cdot G(\frac{T(x)}{\|T(x)\|}) = \|T(x)\| \cdot G(y) = \|T(x)\|$.
Damit ergibt sich die Ungleichung: $\|T(x)\| = |G(T(x))| = |T^\star(G)(x)| \leq \|T^\star(G)\| \cdot \|x\| \leq \|T^\star\| \cdot \underbrace{\|G\|}_{=1} \cdot \|x\|$
und auf beiden Seiten durch $\|x\|$ dividiert $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T^\star\|$. Dies gilt für beliebige $x \in X$, insbesondere folgt also $\|T\| \leq \|T^\star\|$. So folgt insgesamt $\|T\| = \|T^\star\|$. $\square$

Am häufigsten werden adjungierte Operatoren im Zusammenhang mit Hilberträumen (wie oben schon angeschnitten) betrachtet. Wie wir wissen können Hilberträume mit ihren Dualräumen identifiziert werden; Falls X und Y in obiger Definition also Hilberträume sind und $T : X \to Y$ ist, so kann der adjungierte Operator $T^\star : Y^\star \to X^\star$ als Funktion $T^\star : Y \to X$ aufgefasst werden. Dies erleichtert das Arbeiten mit adjungierten Operatoren in der Notation, jedoch besteht die Gefahr, den Bezug zu den mathematischen Objekten zu verlieren. Auch wenn es in solchen Fällen nicht explizit angemerkt wird, steckt im Hintergrund immer der Isomorphismus zwischen Raum und Dualraum.

Beispiel 28
Es sei $X = Y = \mathbb{C}^n$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x^\star \cdot y$, wobei $x^\star$ die adjungierte Matrix von x bezeichnet (transponiert und jeder Eintrag komplex konjugiert). Es sei $T : X \to Y$ linear und beschränkt. Wie wir aus der linearen Algebra wissen lässt sich T als Matrixmultiplikation mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ darstellen, demnach $T(x) = A \cdot x$. Wir suchen nun den adjungierten Operator der Form $T^\star : Y \to X$.

Dazu sei $c \in Y$ beliebig (welches ja eindeutig umkehrbar einem Funktional $x \mapsto \langle c, x\rangle$ entspricht). Dann ist $\langle c, T(x)\rangle = \langle c, A \cdot x\rangle = c^\star \cdot A \cdot x = (A^\star \cdot c)^\star \cdot x = \langle A^\star \cdot c, x\rangle$. Nach dieser Überlegung ist $T^\star : c \mapsto A^\star \cdot c$ der gesuchte adjungierte Operator.

Wenig überraschend decken sich also die Namensgebungen; Der adjungierte Operator des durch die Matrix A induzierten Operators ist der durch die adjungierte Matrix von A induzierte Operator.

Streng nach Definition ist der eigentliche adjungierte Operator $T^\star : Y^\star \to X^\star$ etwas anders; Für $G \in Y^\star$ ist $T^\star(G) = F \in X^\star$ derart, dass $F : x \mapsto \langle A^\star \cdot c, x\rangle$, wenn G die Darstellung $G : y \mapsto \langle c, y\rangle$ besitzt.

Wie gewünscht haben wir jedoch von den konkreten Dualräumen Abstand genommen, unter Bezug der Isometrien $X = X^\star$ bzw. $Y = Y^\star$ die Elemente der Dualräume durch ihre korrespondierenden Elemente aus X und Y ersetzt und den adjungierten Operator als Funktion $T^\star : Y \to X$ bestimmt. Damit entfallen die Mühen, die vorkommenden Funktionale als solche korrekt zu deklarieren und zu notieren.

Beispiel 29
Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph. Für eine beliebige Kante $e \in E$ bezeichne $e^+ \in V$ den Startpunkt und $e^- \in V$ den Endpunkt von e. Für einen Knoten $v \in V$ schreiben wir $v \sim e$ bzw. $e \sim v$, falls v Start- oder Endpunkt der Kante e ist.

Weiters sei eine Funktion $r : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben. Der gerichtete Graph repräsentiert ein Stromnetzwerk; Jede Kante $e \in E$ ist ein Stromkabel, welches den Widerstand $r(e)$ besitzt und in dem Strom von dem Knoten e^+ nach e^- fließt. Weiterhin definieren wir eine Funktion $m : \begin{cases} V \to \mathbb{R}^+ \\ v \mapsto \sum\limits_{e\sim v} \frac{1}{r(e)} \end{cases}$.

Diese beiden Funktionen legen jeweils ein Maß auf ihren Definitionsmengen und in weiterer Folge zwei Hilberträume fest:
$l^2(V, m) := \{\phi : V \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{v\in V} m(v) \cdot \phi(v)^2 < \infty \}$
$l^2(E, r) := \{\psi : E \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{e\in E} r(e) \cdot \psi(e)^2 < \infty \}$
wobei für $\phi_1, \phi_2 \in l^2(V, m)$ definiert ist: $\langle \phi_1, \phi_2\rangle_{l^2(V,m)} := \sum\limits_{v\in V} m(v) \cdot \phi_1(v) \cdot \phi_2(v)$
und für $\psi_1, \psi_2 \in l^2(E, r)$ analog: $\langle \psi_1, \psi_2\rangle_{l^2(E,r)} := \sum\limits_{e\in E} r(e) \cdot \psi_1(e) \cdot \psi_2(e)$.

Eine Funktion $f \in l^2(V, m)$ repräsentiert das Anlegen bestimmter Spannungen an den Knoten aus V. Daraus wünscht man sich, die Stromstärken, die durch die einzelnen Kanten fließen, zu bestimmen. Um das zu tun, bezieht man sich auf das Ohm'sche Gesetz $\Delta U = R \cdot I$ (Spannung = Widerstand mal Stromstärke). Dadurch motiviert lässt sich ein Operator definieren:
$\nabla : \begin{cases} l^2(V, m) \to l^2(E, r) \\ f \mapsto \nabla(f) = \nabla f \end{cases}$ derart, dass $\nabla f(e) = \frac{f(e^+)-f(e^-)}{r(e)}$.

Für Wohldefiniertheit dieses Operators ist zu zeigen, dass für $f \in l^2(V, m)$ beliebig gilt:
$\|\nabla f\|^2_{l^2(E,r)} = \sum\limits_{e\in E} r(e)(\nabla f(e))^2 < \infty$. Man setzt also ein:
$\sum\limits_{e\in E} r(e) \left(\frac{f(e^+)-f(e^-)}{r(e)}\right)^2 = \sum\limits_{e\in E} \frac{(f(e^+)-f(e^-))^2}{r(e)} \leq \sum\limits_{e\in E} \frac{2}{r(e)}(f(e^+)^2 + f(e^-)^2)$
Hier wird für jede Kante je Start- und Endpunkt summiert; Die selbe Summe erhalten wir, indem wir für jeden Knoten über alle damit verbundenen Kanten summieren.

$$= \sum_{v\in V}\sum_{e\sim v}\tfrac{2}{r(e)}f(v)^2 = 2\sum_{v\in V}\underbrace{\left(\sum_{e\sim v}\frac{1}{r(e)}\right)}_{=m(v)} f(v)^2 = 2\|f\|^2_{l^2(V,m)} < \infty$$

Daraus folgt insbesondere auch $\|\nabla f\|_{l^2(E,r)} \leq \sqrt{2}\cdot\|f\|_{l^2(V,m)}$, also Beschränktheit des Operators ∇. Wie sofort erkennbar ist, ist der Operator auch linear.

Nochmals zusammengefasst ist $\nabla : l^2(V,m) \to l^2(E,r)$ ein linearer und beschränkter Operator. Nun können wir (unter der Berücksichtigung, dass wir es hier mit Hilberträumen zu tun haben) den adjungierten Operator $\nabla^\star : l^2(E,r) \to l^2(V,m)$ bilden; Es sei $f \in l^2(V,m)$ und $g \in l^2(E,r)$:

$$\langle \nabla f, g\rangle_{l^2(E,r)} = \sum_{e\in E} r(e)\cdot\nabla f(e)\cdot g(e) = \sum_{e\in E} r(e)\cdot\tfrac{f(e^+)-f(e^-)}{r(e)}\cdot g(e) = \sum_{e\in E}(f(e^+)-f(e^-))\cdot g(e)$$

Wie zuvor ordnen wir die Summe derart um, dass über alle Knoten summiert wird. Dabei ist zu unterscheiden, ob der Knoten ein Start- oder ein Endpunkt einer anliegenden Kante ist:

$$= \sum_{v\in V}\left(\sum_{\substack{e\sim v\\ e^+=v}} f(v)g(e) \;-\; \sum_{\substack{e\sim v\\ e^-=v}} f(v)g(e)\right) = \sum_{v\in V} f(v)\underbrace{\left(\sum_{\substack{e\sim v\\ e^+=v}} g(e) \;-\; \sum_{\substack{e\sim v\\ e^-=v}} g(e)\right)\cdot\frac{1}{m(v)}}_{=:\nabla^\star g(v)}\cdot m(v)$$

$= \langle f, \nabla^\star g\rangle_{l^2(E,r)}$. Damit haben wir den adjungierten Operator bestimmt.

Dies alles sind Hilfsmittel, um Graphen (im konkreten Fall Stromnetzwerke) auf gewisse Eigenschaften zu untersuchen.

Nun wollen wir uns dem Satz vom abgeschlossenen Bild widmen. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit der Abgeschlossenheit des Bildes einer linearen und beschränkten Abbildung.

Beispiel 30
Es seien V und W endlich-dimensionale normierte Räume und $T : V \to W$ linear (da die Räume endlich-dimensional sind, ist die Abbildung auch automatisch beschränkt). Das Bild $T(V) =: Im(T)$ ist wie wir wissen ein Unterraum von W. Da W endlich-dimensional ist, muss auch $Im(T)$ endlich-dimensional sein und nach der Folgerung des Satzes 11 auf Seite 17 ist $Im(T)$ auch abgeschlossen.

Beispiel 31
Wir betrachten den Banachraum $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Es sei $T : \begin{cases} l^\infty \to l^\infty \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\frac{x_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ gegeben.
Man stellt leicht fest, dass T linear und beschränkt ist. Das Bild besitzt folgende Darstellung:
$Im(T) = \{(y_n) \in l^\infty \mid \|(n^2 y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |n^2 y_n| < \infty\}$.

Nehmen wir nun die Folge von Folgen $y^N = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N}, 0, 0, \ldots)$ her, so konvergiert sie in $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ gegen die Folge $y = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es sind alle $y^N \in Im(T)$, jedoch gilt für y: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |n^2\frac{1}{n}| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$. Also liegt der Grenzwert y der in $Im(T)$ liegenden Folge nicht in $Im(T)$, diese Menge kann somit nicht abgeschlossen sein.

Im Gegensatz zu endlich-dimensionalen Räumen ist in unendlich-dimensionalen Räumen also das Bild einer linearen und beschränkten Abbildung im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

Um ein nützliches Kriterium zu gewinnen, wann das Bild abgeschlossen ist, rufen wir uns das Korollar 9 auf Seite 31 (im Folgenden abgekürzt mit SoA+ (Korollar des Satzes der offenen Abbildung)) in Erinnerung. Dieses liefert uns, dass falls X und Y Banachräume sind (Vollständigkeit beider Räume ist essentiell!) und $T : A \to Y$ linear, beschränkt und bijektiv ist, auch die Umkehrfunktion T^{-1} beschränkt, insbesondere also stetig ist.

Seien also X, Y Banachräume. Ist $T : X \to Y$ nicht bijektiv, so lässt sich diese Abbildung in eine Bijektion umformulieren mit: $\tilde{T} : X/_{ker(T)} \to Im(T)$. Dabei bezeichnet $X/_{ker(T)}$ den Faktorraum von X nach dem abgeschlossenen Unterraum $ker(T)$. Dieser bildet mit der Norm $\|[x]\| = \inf_{k \in ker(T)} \|x + k\|$ für $[x] \in X/_{ker(T)}$ wieder einen Banachraum (siehe Übung). Falls nun auch $Im(T)$ ein Banachraum ist, so folgt aus dem Korollar SoA+ in weiterer Folge, dass $Im(T)$ abgeschlossen ist. Leider ist $Im(T)$ nicht immer ein Banachraum, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

Beispiel 32
Es sei X ein Vektorraum und es seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ zwei nicht zueinander äquivalente Normen, wobei $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$ sei ($\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : \ \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1$). Die Abbildung $T : \begin{cases} (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2) \\ x \mapsto x \end{cases}$ ist bijektiv, linear und stetig. Die Umkehrabbildung T^{-1} ist jedoch nicht stetig, da die Normen laut Angabe nicht äquivalent sind.

Falls $(X, \|\cdot\|_1)$ also ein Banachraum ist, kann $(X, \|\cdot\|_2)$ kein Banachraum (also nicht vollständig) sein, weil uns das Korollar SoA+ sonst den Widerspruch liefert, dass die Umkehrabbildung doch stetig sein müsste.

Für den Satz vom abgeschlossenen Bild benötigen wir einige Lemmata und Korollare, wobei wir nicht auf alle Beweise näher eingehen wollen.

Lemma 9
Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in B(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(1) $Im(T)$ ist abgeschlossen

(2) $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \exists x' \in X : \ T(x) = T(x')$ und $\|x'\|_X \leq M \cdot \|T(x)\|_Y$

(3) $\exists \delta > 0 : \ \overline{T(B_X(0,1))} \supset B_{Im(T)}(0, \delta)$

Korollar 11
Es sei X Banachraum. Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt:

(1) Sei $U \subset X$, $\overline{U} \neq X$. Dann $\exists \phi \in X^\star : \ \phi \not\equiv 0$ und $\forall u \in U : \phi(u) = 0$.

(2) Seien $U, V \subset X$, U, V konvex, U abgeschlossen, V kompakt. Dann $\exists \phi \in X^\star : \ \phi|_U < \alpha < \beta < \phi|_V$

Hinweis: Punkt (2) wurde Eins zu Eins aus der Vorlesungsmitschrift übernommen. Er kann jedoch so, wie er da steht, nicht richtig sein. Einerseits wäre für einen komplexen Banachraum (und somit komplexwertigem ϕ) die obige Ordnungsrelation nicht definiert. Andererseits müsste auch im reellen Fall beispielsweise für $U = V$ (was ja nicht ausgeschlossen ist) für alle $x \in U$ gelten: $\phi(x) < \phi(x)$. Im Folgenden wird dennoch davon ausgegangen, dass dieser Punkt überall dort gilt, wo er verwendet wird.

Definition 37
Sei X normierter Raum. Sei $S \subset X$, sei $U \subset X^\star$

Dann heißt $S^a := \{f \in X^\star \mid \forall s \in S : \ f(s) = 0\}$ der **Annulator** oder auch **Annihilator** von S.

Ähnlich definieren wir: ${}^aU := \{x \in X \mid \forall g \in U : \ g(x) = 0\}$.

Der Annihilator verallgemeinert im gewissen Sinne den Begriff der Orthogonalität auf normierte Räume. Wie beim orthogonalen Komplement ist leicht zu zeigen, dass S^a bzw. ${}^aU$ abgeschlossene Unterräume sind.

Lemma 10
Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X,Y)$. Dann gilt:

(1) $Im(T)^a = ker(T^\star)$

(2) ${}^a(Im(T^\star)) = ker(T)$

(3) $\overline{Im(T)} = {}^a(ker(T^\star))$

(4) $\overline{Im(T^\star)} = ker(T)^a$

Beweis. (1) $g \in Im(T)^a \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X: \; g(T(x)) = T^\star(g)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; T^\star(g) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; g \in ker(T^\star)$

(2) (*) $x \in ker(T) \;\Leftrightarrow\; T(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall g \in Y^\star: \; g(T(x)) = T^\star(g)(x) = 0$
$\Leftrightarrow\; \forall f \in Im(T^\star): f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in {}^a(Im(T^\star))$

(3) "$\subset$" :
Es genügt zu zeigen: $Im(T) \subset {}^a(ker(T^\star))$, da letztere Menge abgeschlossen ist. Sei $y \in Im(T)$, $\exists x \in X: \; T(x) = y$. Dann gilt $\forall g \in ker(T^\star)$: $g(y) = g(T(x)) = T^\star(g)(x) = 0 \;\Rightarrow\; y \in {}^a(ker(T^\star))$

"$\supset$" :
Dies gilt, falls ${}^a(ker(T^\star))\backslash\overline{Im(T)} = \emptyset$. Indirekt sei diese Menge nicht leer.
Also $\exists y \in {}^a(ker(T^\star))\backslash\overline{Im(T)}$. Es folgt $y \neq 0$ und $Im(T) \neq Y$. Nach Korollar 11 gibt es ein Funktional $\phi \in Y^\star$ derart, dass $\phi|_{Im(T)} \equiv 0$ und $\phi(y) \neq 0$. Es ist $\phi \in Im(T)^a = ker(T^\star)$; da $\phi(y) \neq 0$ folgt, dass $y \notin {}^a(ker(T^\star))$, was ein Widerspruch zur Wahl von y ist.

(4) ohne Beweis

□

Satz 29 (Satz vom abgeschlossenen Bild)
Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X,Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $Im(T)$ ist abgeschlossen

(2) $Im(T) = {}^a(ker(T^\star))$

(3) $Im(T^\star)$ ist abgeschlossen

(4) $Im(T^\star) = ker(T)^a$

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma folgen bereits die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) und (3) $\Leftrightarrow$ (4). Wir zeigen also bloß (1) $\Rightarrow$ (4) und (3) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (4).

Klar ist bereits: $Im(T^\star) \subset ker(T)^a$. Sei nun $f \in ker(T)^a$. Wir definieren $h: \begin{cases} Im(T) \to \mathbb{K} \\ y \mapsto f(x) \end{cases}$ mit $x \in X$ derart, dass $T(x) = y$. Diese Funktion ist wohldefiniert, denn für jedes $y \in Im(T)$ gibt es klarerweise zumindest ein $x \in X$ mit $T(x) = y$ und für ein weiteres $x' \in X$ mit $T(x) = T(x')$ gilt $x - x' \in ker(T) \subset ker(f)$, also $f(x) = f(x')$.

Linearität von h folgt leicht aus der Linearität von f und T. Um Beschränktheit zu zeigen nutzen wir Punkt (2) des Lemmas 9 (Seite 43). Sei $y \in Im(T)$ beliebig, weiters $x \in X$ derart, dass $h(y) = f(x)$. Es gibt ein $x' \in X$ derart, dass $T(x') = T(x) = y$ und $\|x'\| \leq M\|y\|$.
Dann ist $|h(y)| = |f(x')| \leq \|f\| \cdot \|x'\| \leq \|f\| \cdot M \cdot \|y\|$.

Insgesamt ist h also ein lineares und beschränktes Funktional auf $Im(T)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung ϕ auf ganz Y. Mit diesem Funktional erhalten wir:
$T^\star(\phi) = \phi \circ T = \phi|_{Im(T)} \circ T = h \circ T = f$, also ist $f \in Im(T^\star)$. Dies liefert uns wie gewünscht $ker(T)^a \subset Im(T^\star)$.

(3) $\Rightarrow$ (1).
Sei $Im(T^\star)$ abgeschlossen. Nach Lemma 9 (Seite 43) gilt:
$Im(T)$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \overline{T(B_X(0,1))} \supset B_{Im(T)}(0,\delta)$,
wir zeigen also diese Eigenschaft. Aus dem gleichen Lemma folgt mit der Abgeschlossenheit $Im(T^\star)$, dass $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall g \in Y^\star\ \exists g' \in Y^\star :\ T^\star(g) = T^\star(g')$ und $\|g'\|_{Y^\star} \leq M \cdot \|T^\star(g)\|_{X^\star}$.

Sei nun $y \in Im(T) \backslash \overline{T(B_X(0,1))}$. Wir setzen $U := \overline{T(B_X(0,1))}$ und $V := \{y\}$. Damit sind die Voraussetzungen des Korollars 11 (Seite 43) erfüllt (Hinweis beachten!), was uns liefert:
$\exists g \in Y^\star\ \exists \alpha, \beta : g|_U < \alpha < \beta < g|_V$
und in weiterer Folge
$\sup\limits_{u \in U} \|g(u)\| = \sup\limits_{x \in B_X(0,1)} \|g \circ T(x)\| = \|g \circ T\| = \|T^\star(g)\| < |g(y)|$.

Mit obiger Feststellung gilt: $\exists g' \in Y^\star : T^\star(g) = T^\star(g')$ und $\|g'\| \leq M\|T^\star(g)\|$. Aus $g \circ T = T^\star(g) = T^\star(g') = g' \circ T$ und $y \in Im(T)$ folgt $g(y) = g'(y)$. Wir erhalten die Ungleichungskette:
$\frac{\|g'\|}{M} \leq \|T^\star(g)\| < g(y) = g'(y) \leq \|g'\| \cdot \|y\| \ \Rightarrow\ \|y\| > \frac{1}{M}$.

Wir legen also fest: $\delta := \frac{1}{M}$. Wir haben für $y \in Im(T)$ gerade gezeigt: $y \notin \overline{T(B_X(0,1))} \ \Rightarrow\ \|y\| > \delta$. Das "Umdrehen" dieser Implikation liefert also insbesondere $y \in B_{Im(T)}(0,\delta) \ \Rightarrow\ y \in \overline{T(B_X(0,1))}$, was unsere Behauptung ist.

$\square$

10 Schwache Konvergenz

Einige Begriffe von topologischen Räumen haben wir bereits im allerersten Kapitel behandelt. Um den Begriff schwache Konvergenz einzuführen, benötigen wir ein paar weitere Begriffe von topologischen Räumen. Speziell wollen wir uns überlegen, wie wir bei Mengen, die noch keine Topologie besitzen, die Konstruktion einer solchen sinnvoll motivieren können.

Definition 38
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Gelte:

$\forall U \in \mathcal{T}\ \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}\colon\ x \in B \subset U$

Dann heißt $\mathcal{B}$ **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$.

Offensichtlich ist jede Menge der Basis eine offene Menge in der Topologie, die von dieser Basis induziert wird. Üblicherweise werden Mengen aus der Basis als typische offene Mengen bezeichnet.

Beispiel 33
Es sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum. Die Menge aller offenen Kugeln $\mathcal{B} := \{B(x, \epsilon) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$ bildet offensichtlich eine Basis für die von der Metrik induzierten Topologie.

Lemma 11
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

$\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie auf $X \;\Leftrightarrow\; \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$ und $\forall B, C \in \mathcal{B}\ \forall x \in B \cap C\ \exists D \in \mathcal{B}\colon\ x \in D \subset B \cap C$

Die Topologie T entsteht dann aus allen beliebigen Vereinigungen der Elemente der Basis:
$T := \left\{ \bigcup\limits_{i \in I} B_i \;\middle|\; I \text{ Indexmenge }, B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I \right\}$

Definition 39
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Gelte, dass die Menge aller Durchschnitte endlich vieler Elemente aus $\mathcal{S}$ eine Basis ist. Dann heißt $\mathcal{S}$ **Sub-Basis**.

Lemma 12
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$.

$\mathcal{S}$ ist eine Sub-Basis $\;\Leftrightarrow\; \bigcup\limits_{D \in \mathcal{S}} D = X$

Nochmals zusammengefasst induziert jede Sub-Basis eine Basis, welche wiederum eine Topologie induziert.

Wie bereits im ersten Kapitel (Definition 6, Seite 3) definiert ist die Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$ ein Begriff, der von den Topologien auf X und Y abhängt. Wie im Folgenden behandelt lässt sich die Sache auch andersherum aufziehen. Falls eine der Mengen X oder Y noch nicht mit einer Topologie versehen ist, kann eine Topologie derart konstruiert werden, dass die gegebene Funktion f stetig wird.

Definition 40
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ zwei Topologien auf X.

Gelte, dass $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Dann heißt $\mathcal{T}$ **gröber** als $\mathcal{T}'$, bzw. heißt $\mathcal{T}'$ **feiner** als $\mathcal{T}$.

In Worten: $\mathcal{T}$ ist gröber als $\mathcal{T}'$, falls jede offene Menge in $\mathcal{T}$ auch offen in $\mathcal{T}'$ ist.

Beispiel 34
Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig (bezüglich dieser angegebenen Topologien (!)). Die Funktion bleibt weiterhin stetig, falls $\mathcal{T}_X$ mit einer feineren Topologie, bzw. falls $\mathcal{T}_Y$

mit einer gröberen Topologie ersetzt wird (dies folgt sehr einfach aus der Definition von Stetigkeit).

Definition 41
Seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$.

(1) Sei $\mathcal{T}_Y$ Topologie auf Y. Dann heißt $\mathcal{T}_{X,f} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$ die von f **induzierte Topologie** auf X. (Diese ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich der f stetig ist.)

(2) Sei $\mathcal{T}_X$ Topologie auf X. Dann heißt $\mathcal{T}_{Y,f} := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$ die von f **induzierte Topologie** auf Y. (Diese ist die feinste Topologie auf Y, bezüglich der f stetig ist.)

Zu zeigen, dass diese induzierten Topologien tatsächlich Topologien sind, ist eine einfache Übungsaufgabe.

Damit haben wir eine einfache Möglichkeit, mit einer gegebenen Funktion $f : X \to Y$ und einem gegebenen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Topologie auf X zu konstruieren. Da Stetigkeit für eine einzelne Funktion nicht gerade sehr spannend ist, wollen wir unsere Mittel allgemeiner gestalten und eine Topologie auf X zu konstruieren, bezüglich der eine ganze Familie $(f_i)_{i\in I}$ an Funktionen $f_i : X \to Y$ stetig ist.

Dies ist nicht weiter schwer. Denn es ist zwar die Vereinigung aller von f_i induzierten Topologien auf X, also $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{T}_{X,f_i}$ im Allgemeinen keine Topologie, sie bildet aber (nach einem obigen Lemma) eine Sub-Basis, welche wiederum eine Topologie $\mathcal{T}'$ induziert. Mit einfachen Überlegungen stellt man fest, dass $\mathcal{T}'$ feiner ist als alle Topologien $\mathcal{T}_{X,f_i}$, demnach sind alle Funktionen der Familie bezüglich der Topologie $\mathcal{T}'$ stetig.

Definition 42
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum.

Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i : X \to Y$. Die durch die Sub-Basis $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{T}_{X,f_i}$ induzierte Topologie heißt die **durch die Familie** $(f_i)_{i\in I}$ **induzierte Topologie**.

Definition 43
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Die **schwache Topologie** auf X, bezeichnet mit $\mathcal{T}_{X,X^\star}$, ist die von allen linearen und beschränkten Funktionalen induzierte Topologie. (Diese ist die gröbste Topologie, bezüglich der alle linearen und beschränkten Funktionale stetig sind.)

Sei weiters (x_n) eine Folge in X. Die Folge heißt **schwach konvergent**, falls sie bezüglich der schwachen Topologie konvergiert. (Definition der Konvergenz in topologischen Räumen siehe Definition 2, Seite 1)

Nach obiger Überlegung besitzt die Basis der schwachen Topologie $\mathcal{T}_{X,X^\star}$ die Darstellung
$\mathcal{B} := \{T_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap T_k^{-1}(V_k) \mid k \in \mathbb{N},\ V_1, \ldots V_k \text{ offen in } \mathbb{K},\ T_1, \ldots, T_k \in X^\star\}$

Die schwache Topologie ist gröber als die durch $\|\cdot\|$ induzierte Topologie. Daraus folgt vor allem, dass falls eine Folge (x_n) (bezüglich der $\|\cdot\|$-Topologie) konvergiert, sie auch schwach und gegen denselben Grenzwert konvergiert. Im Endlich-dimensionalen stimmen die schwache und die gewöhnliche Topologie überein, im Unendlich-dimensionalen muss das nicht mehr der Fall sein, wie ein Beispiel später zeigen wird.

Lemma 13
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Die schwache Topologie ist eine Hausdorff-Topologie.

Beweis. Seien $x \neq y \in X$ beliebig. In der Übung wurde mithilfe des Satzes von Hahn-Banach gezeigt: $\exists T \in X^\star :\ T(x) \neq T(y)$. Da $\mathbb{K}$ bereits ein Hausdorff-Raum ist, gibt es zwei offene disjunkte Umgebungen $U, V \subset \mathbb{K}$ mit $T(x) \in U$, $T(y) \in V$.

Damit folgt direkt $x \in T^{-1}(U)$ und $y \in T^{-1}(V)$, wobei diese Mengen einerseits disjunkt und andererseits als Urbilder von offenen Mengen unter der stetigen Abbildung T selbst wieder offen sind. Dies erfüllt die

Forderungen der Definition. □

Damit erhalten wir auch, dass der Grenzwert einer bezüglich der schwachen Topologie konvergenten Folgen eindeutig bestimmt ist.

Satz 30
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Sei (x_n) eine Folge in X und $x \in X$. Es gilt:

$x_n \to x$ schwach $\Leftrightarrow \forall T \in X^\star : \; T(x_n) \to T(x)$

Beweis. $\Rightarrow$.
Sei $T \in X^\star$ beliebig und sei $U \subset \mathbb{K}$ eine beliebige offene Umgebung von $T(x)$, also $T(x) \in U$. Es folgt $x \in T^{-1}(U)$, diese Menge ist als Urbild einer offenen Menge unter einem linearen und beschränkten Funktional auch in $T_{X,X^\star}$ offen. Da nach Annahme $x_n \to x$ schwach, liegen fast alle Glieder $x_n \in T^{-1}(U)$, somit gilt auch für fast alle $n \in \mathbb{N}$: $T(x_n) \in U$. Dies erfüllt die Definition der Konvergenz $T(x_n) \to T(x)$.

$\Leftarrow$.
Sei $U \in T_{X,X^\star}$. Die schwache Topologie wurde mithilfe der wie oben notierten Basis $\mathcal{B}$ erzeugt. Nach Eigenschaft der Basis gibt es endlich viele $T_j \in X^\star$ und $V_j \subset \mathbb{K}$ offen derart, dass $x \in T_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap T_k^{-1}(V_k) \subset U$.

Es folgt $\forall j = 1, \dots k : \; T_j(x) \in V_j$. V_j ist also offene Umgebung von $T_j(x)$. Nach Annahme konvergiert $T_j(x_n) \to T_j(x)$, also liegen nach Definition der Konvergenz fast alle diese Folgenglieder in V_j: $\exists n_j \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_j : \; T_j(x_n) \in V_j$.

Mit $N := \max\limits_{j=1,\dots k} n_j$ gilt $\forall j = 1, \dots k \; \forall n \geq N : \; x_n \in T_j^{-1}(V_j)$, also insgesamt gilt $x_n \in T_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap T_k^{-1}(V_k) \subset U$ für fast alle n. Nach Definition konvergiert damit $x_n \to x$ schwach.

□

Beispiel 35
Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraums $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Ein jedes Funktional $T \in H^\star$ lässt sich als Skalarprodukt mit einem gewissen $y \in H$ beschreiben. Es gilt nach der Besselschen Ungleichung: $\|y\|^2 \geq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\hat{y}(n)|^2$, also ist diese Reihe konvergent und es muss gelten $\hat{y}(n) \to 0$. Dabei ist ja $\hat{y}(n) = \langle u_n, y \rangle = T(u_n)$.

Insgesamt gilt also für alle Funktionale $T \in H^\star$, dass $T(u_n) \to 0$. Damit folgt, dass die Folge (u_n) schwach gegen $0 =: u_\infty$ konvergiert. In der gewöhnlichen Topologie konvergiert sie gar nicht, da sonst die Grenzwerte übereinstimmen müssten, was uns den Widerspruch $1 = \|u_n\| \to \|u_\infty\| = 0$ beschert.

Offensichtlich muss auch die Norm in der schwachen Topologie nicht mehr stetig sein, für Banachräume gilt aber zumindest noch folgendes Lemma.

Lemma 14
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, sei (x_n) Folge in X und $x_n \to x \in X$ schwach konvergent. Dann gilt:

Die Folge $\|x_n\|$ ist beschränkt und $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$

Beweis. Wir beziehen uns auf die kanonische Einbettung (siehe Definition 34, Seite 39). Für ein $x \in X$ sei $F_x \in X^{\star\star}$, $T \mapsto T(x)$. Wie wir wissen gilt $\|F_x\|_{X^{\star\star}} = \|x\|_X$. Zudem gilt $\forall T \in X^\star : \; F_{x_n}(T) \to F_x(T)$, denn es gilt $F_{x_n}(T) = T(x_n) \to T(x) = F_x(T)$ nach dem vorherigen Satz. Da die Folge $(\; F_{x_n}(T) \;)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist sie beschränkt.

Also gilt $\forall T \in X^\star : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |F_{x_n}(T)| < \infty$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gilt:
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|F_{x_n}\|_{X^{\star\star}} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$, woraus die Beschränktheit von $(\|x_n\|)$ folgt.

Weiters gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\forall T \in X^\star$: $\frac{|F_{x_n}(T)|}{\|T\|} \leq \|F_{x_n}\| = \|x_n\|$.

Auf beiden Seiten den Limes Inferior angewendet liefert:
$\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|F_{x_n}(T)|}{\|T\|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|F_{x_n}(T)|}{\|T\|} = \frac{|F_x(T)|}{\|T\|} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Auf beiden Seiten $\sup\limits_{T\in X^\star}$ angewendet liefert:
$\sup\limits_{T\in X^\star} \frac{|F_x(T)|}{\|T\|} = \|F_x\| = \|x\| \leq \sup\limits_{T\in X^\star} \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, was die Behauptung ist. □

Die kanonische Einbettung liefert uns eine Familie von Elementen des Bidualraumes eines normierten Raumes. Diese Familie induziert ihrerseits eine Topologie auf dem Dualraum.

Definition 44
Sei X normierter Raum und F die kanonische Einbettung (siehe Definition 34, Seite 39). Die durch die Familie $(F_x)_{x\in X}$ induzierte Topologie auf $X^\star$ heißt die **Schwach-$\star$-Topologie**.

Analog wie bei der schwachen Topologie lässt sich leicht eine Darstellung der Basis der Schwach-$\star$-Topologie angeben:
$\mathcal{B} := \left\{ F_{x_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap F_{x_k}^{-1}(U_k) \mid k \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_k \in X,\ U_1, \ldots U_k \ \subset \mathbb{K} \text{ offen } \right\}$
wobei $F_x^{-1}(U) = \{T \in X^\star \mid T(x) \in U\}$, also umgeformt:
$\mathcal{B} = \{\{T \in X^\star \mid T(x_j) \in U_j, j = 1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_k \in X,\ U_1, \ldots U_k \ \subset \mathbb{K} \text{ offen } \}$

Lemma 15
Sei X normierter Raum. Es gilt:

(1) Die Schwach-$\star$-Topologie ist Hausdorff-Topologie.

(2) Für eine Folge (T_n) in $X^\star$ und $T \in X^\star$ gilt:
$T_n \to T$ schwach-$\star$-konvergent $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X : \ T_n(x) \to T(x)$

Schwach-$\star$-Konvergenz ist also äquivalent zur punktweisen Konvergenz der linearen und beschränkten Funktionale.

Wir wollen uns nun dem Satz von Alaoglu widmen. Für diesen benötigen wir neben ein paar weiteren einfachen Kenntnissen der Topologie auch den Satz von Tychonoff. Dabei wollen wir nicht auf alle Beweise weiter eingehen.

Satz 31 (Satz von Tychonoff)
Sei $(X_i, T_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist der Produktraum $\prod\limits_{i\in I} X_i$ kompakt bezüglich der Produkttopologie.

Begriffserklärungen:

- Der Produktraum ist $\prod\limits_{i\in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i \ \middle|\ \forall i \in I : \ f(i) \in X_i \right\}$.
- Die Produkttopologie darauf ist die von der Familie der Projektionen $(\pi_i)_{i\in I}$ induzierte Topologie.
- Für $i \in I$ ist die Projektion $\pi_i : \prod\limits_{j\in I} X_j \to X_i$ bekanntlich definiert durch $\pi_i(f) := f(i)$.

Satz 32 (Satz von Alaoglu)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraumes $\overline{B}_{X^\star}(0, 1)$ kompakt bezüglich der Schwach-$\star$-Topologie.

Beweis. Wir definieren für $x \in X: \; K_x := \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|) = \{t \in \mathbb{K} \mid |t| \leq \|x\|\}$. Wir wissen aus der Analysis, dass diese Mengen kompakt bezüglich der üblichen Topologie auf $\mathbb{K}$ ist. Nach dem Satz von Tychonoff wissen wir, dass das Produkt dieser Familie $\prod\limits_{x \in X} K_x$ bezüglich der Produkttopologie kompakt ist.

Dabei ist dieser Produktraum: $\prod\limits_{x \in X} K_x = \{f : X \to \mathbb{K} \mid \forall x \in X: \; |f(x)| \leq \|x\|\}$, versehen mit der Topologie induziert durch die typischen offenen Mengen
$\{f : X \to \mathbb{K} \mid \forall x \in X: \; |f(x)| \leq \|x\| \text{ und } \forall j = 1, \ldots, n: \; f(x_j) \in U_j\}$,
wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ und $U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{K}$ offen sind.

Im Vergleich dazu betrachten wir $\overline{B}_{X^\star}(0,1) \subset X^\star$ versehen mit der Schwach-$\star$-Topologie, induziert durch die offenen Mengen
$\{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ linear, beschränkt und } \forall j = 1, \ldots, n: \; f(x_j) \in U_j\}$,
abermals für $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ und $U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{K}$ offen.

Unter Bezugnahme einer Spurtopologie stellt sich $\overline{B}_{x^\star}(0,1)$ als topologischer Unterraum von $\prod\limits_{x \in X} K_x$ bezüglich der Schwach-$\star$-Topologie dar. Die Menge $\overline{B}_{x^\star}(0,1)$ ist also als Teilmenge der kompakten Menge $\prod\limits_{x \in X} K_x$ kompakt, falls sie abgeschlossen ist (abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt).

Es verbleibt zu zeigen dass $\overline{B}_{x^\star}(0,1)$ abgeschlossen ist. Darauf wollen wir nicht näher eingehen. $\square$

Aus dem Satz von Alaoglu folgt insbesondere, dass jede Folge in $\overline{B}_{x^\star}(0,1)$ eine schwach-$\star$-konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\overline{B}_{x^\star}(0,1)$ besitzt.

Beispiel 36
Im Kapitel Dualräume wurde angemerkt, dass der Dualraum von $X = (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ dem Raum: $\{\mu \mid \mu : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ signiertes Maß}\}$ entspricht. Mit $T_\mu(f) := \int_0^1 f \; d\mu$ für $f \in X$ und $\|T_\mu\|_{X^\star} = \|\mu\|_{BV}$ erhalten wir für die abgeschlossene Einheitskugel von $X^\star$ eine Darstellung der Form
$\{\mu : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ signiertes Maß} \mid \|\mu\|_{BV} \leq 1\}$, welche nach dem Satz von Alaoglu schwach-$\star$-kompakt ist.

Die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist eine abgeschlossene Teilmenge dieser Kugel und somit ebenfalls kompakt. Daraus folgt, dass jede Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen eine schwach-$\star$-konvergente Teilfolge besitzt. Dabei bedeutet die Schwach-$\star$-Konvergenz $\mu_n \to \mu$, dass $\int f \; d\mu_n \to \int f \; d\mu$ für alle $f \in \mathcal{C}[0,1]$.

11 Kompakte Operatoren

Zu Beginn rufen wir uns Satz 6 auf Seite 10 in Erinnerung. Für einen metrischen Raum (X, d) und $K \subset X$ gelten folgende äquivalente Aussagen:

(1) Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung (Überdeckungskompaktheit)

(2) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K (Folgenkompaktheit)

(3) K ist vollständig und besitzt für jedes $\epsilon > 0$ ein endliches ϵ-Netz, daher:
$\forall \epsilon > 0\ \exists x_1, \ldots x_{n_\epsilon} \in C\ :\ C \subset \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B(x_i, \epsilon)$ (total beschränkt), bzw. alternativ formuliert
$\forall \epsilon > 0\ \exists E \subset K$ endlich $\forall x \in K :\ d(x, E) := \inf_{e \in E} d(x, e) < \epsilon$

Dieser Satz gilt wohlgemerkt für metrische Räume. Punkt (1) und (2) können auch für topologische Räume überprüft werden. Dabei stellt man fest, dass in Hausdorff-Räumen die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) gilt, während die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) nicht gilt.

Der Satz von Alaoglu lieferte uns, dass die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraumes stets schwach-$\star$-kompakt ist. Dass dieser Satz so von Bedeutung ist liegt unter Anderem daran, dass eine abgeschlossene Einheitskugel eines unendlich-dimensionalen Raumes stets nicht kompakt ist.

Satz 33
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt in X (bezüglich der durch die Norm induzierten Topologie) genau dann, wenn X endlich-dimensional ist.

Beweis. $\Leftarrow$. Ist klar (nach dem Satz von Heine-Borel; siehe Analysis 2)

$\Rightarrow$.
Wir wählen $\epsilon = \frac{1}{2}$. Nach Annahme sei $\overline{B}(0,1)$ kompakt, es gibt also eine endliche Menge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \overline{B}(0,1)$, sodass $\overline{B}(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_n, \epsilon)$ (ϵ-Netz-Eigenschaft). Wir setzen $V := \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$; dies ist ein endlich-dimensionaler, also abgeschlossener Teilraum von X. Wir behaupten nun, dass $V = X$. Indirekt gelte $V \neq X$. Dann gibt es ein $x \in X \backslash V$. Es ist jedenfalls $x \neq 0$.

Es ist weiters $\alpha := d(x, V) = \inf_{v \in V} \|x - v\| > 0$, denn sonst gäbe es eine Folge aus V, die gegen x konvergiert, womit nach Abgeschlossenheit von V auch $x \in V$ sein müsste, was ein Widerspruch zur Wahl von x ist. Nach Infimums-Eigenschaft gilt: $\exists y \in V :\ \alpha \leq \|x - y\| < \frac{3}{2}\alpha$. Mit $z := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \overline{B}(0,1)$ folgt, dass es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart gibt, dass $\|z - a_k\| < \epsilon = \frac{1}{2}$.

So erhalten wir eine Darstellung
$x = y + \|x - y\|z = y + \|x - y\|(z - a_k + a_k) = y + \|x - y\|a_k + \|x - y\|(z - a_k)$
$\Leftrightarrow\ x - (y + \|x - y\|a_k) = \|x - y\|(z - a_k)$. Auf beiden Seiten die Norm angewendet liefert:
$\underbrace{\|x - (\underbrace{y + \|x - y\|a_k}_{\in V})\|}_{\geq \alpha} = \underbrace{\|x - y\|}_{< \frac{3}{2}\alpha} \underbrace{\|z - a_k\|}_{< \frac{1}{2}}$. Damit erhalten wir den Widerspruch $\alpha < \frac{3}{4}\alpha$.

$\square$

Definition 45
Eine Menge $M \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **relativ kompakt**, falls $\overline{M}$ kompakt ist.

In Worten: Eine Menge heißt relativ kompakt, falls ihr Abschluss kompakt ist.

Beispiel 37 (*)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Raum. Nach dem Satz von Heine-Borel ist Kompakt-

heit einer Menge äquivalent zur Beschränktheit und Abgeschlossenheit. Für eine beliebige beschränkte Menge $B \subset X$ ist $\overline{B}$ klarerweise abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Damit ist jede beschränkte Teilmenge relativ kompakt. Umgekehrt muss jede relativ kompakte Menge auch beschränkt sein, da ihr Abschluss sonst unbeschränkt, also nicht kompakt wäre.

Im Endlich-dimensionalen ist eine Menge also relativ kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Satz 34 (Satz von Arzela-Ascoli)
Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Es sei $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ versehen mit der Supremumsnorm. Sei $K \subset \mathcal{C}(X)$. Dann gilt:

K ist relativ kompakt genau dann, wenn K

(1) punktweise beschränkt ist, dh.
$\forall x \in X\ \exists M_x \in \mathbb{R}\ \forall f \in K:\ |f(x)| \leq M_x$
und

(2) gleichgradig stetig ist, dh.
$\forall x_0 \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta)\ \forall f \in K:\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Lemma 16 (*)
Sei (X, d) metrischer Raum und $K \subset X$. Es gilt:

K ist relativ kompakt $\Leftrightarrow$ Jede Folge aus K besitzt eine konvergente Teilfolge (deren Grenzwert nicht zwangsweise in K liegen muss).

Beweis. $\Rightarrow$. Ist klar (da es sich um einen metrischen Raum handelt, ist (Überdeckungs-)Kompaktheit äquivalent zur Folgenkompaktheit).

$\Leftarrow$.
Sei $(x_n) \in \overline{K}^{\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\overline{K}$.

1.Fall Seien unendlich viele Folgenglieder aus K, dh. es gibt eine Teilfolge (x_{n_k}) die ganz in K liegt. Nach Annahme besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})$, deren Grenzwert (wegen der Abgeschlossenheit von $\overline{K}$) in $\overline{K}$ liegen muss.

2.Fall Seien fast alle Folgenglieder aus $\overline{K} \backslash K$. O.B.d.A. seien tatsächlich alle Folgenglieder aus $\overline{K} \backslash K$. Es gilt nach Eigenschaft des Abschlusses: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in K:\ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Damit erhalten wir eine Folge $(y_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

Nach Annahme gibt es wieder eine konvergente Teilfolge (y_{n_k}), deren Grenzwert z in $\overline{K}$ liegt. Dann gilt: $d(x_{n_k}, z) \leq \underbrace{d(x_{n_k}, y_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{d(y_{n_k}, z)}_{\to 0} \to 0$, also ist $z \in \overline{K}$ der Grenzwert der Teilfolge (x_{n_k}).

Es folgt die Kompaktheit von $\overline{K}$ aus der gezeigten Folgenkompaktheit.

□

Satz 35
Sei $1 \leq p < \infty$ und $(l^p, \|\cdot\|_p)$ der Raum der p-summierbaren Folgen (siehe Beispiel 11, Seite 13, wir notieren die Folgen nun bewusst als Funktionen). Es sei $K \subset l^p$. Dann gilt:

K ist relativ kompakt genau dann, wenn gilt:

(1) K ist punktweise beschränkt, dh.
$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists M_k \in \mathbb{R}\ \forall f \in K:\ |f(k)| \leq M_k$
und

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(k)|^p$ konvergiert bezüglich Variieren der Funktion f gleichmäßig, dh.

$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall f \in K:\ \sum\limits_{k=N}^{\infty} |f(k)|^p < \epsilon$

Beweis. $\Rightarrow$.
Sei K relativ kompakt. Da $\overline{K}$ kompakt ist, ist $\overline{K}$ beschränkt (sonst gäbe es beispielsweise kein endliches ϵ-Netz), und damit ist auch K als Teilmenge einer beschränkten Menge beschränkt. Also gibt es ein $M > 0$ derart, dass $\|f\|_p \leq M$ für alle $f \in K$, insbesondere gilt $\forall f \in K \; \forall k \in \mathbb{N}: \; |f(k)| \leq \|f\|_p \leq M$, speziell erfüllt also dieses M die Eigenschaft (1).

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da $\overline{K}$ kompakt ist gibt es (nach ϵ-Netz-Eigenschaft) $f_1, \dots, f_n \in \overline{K}$ derart, dass $\forall f \in \overline{K} \; \exists i \in \{1, \dots, n\}: \; \|f - f_i\|_p < \epsilon$. Es sei $N \in \mathbb{N}$ vorläufig beliebig.

Für ein beliebiges $f \in K$ und dazu wie oben passend gewähltes f_i gilt die Abschätzung (Dreiecksungleichung):

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} |f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{\left(\sum_{k=N}^{\infty} |f(k) - f_i(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq \|f-f_i\|_p < \epsilon} + \left(\sum_{k=N}^{\infty} |f_i(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dabei ist $\left(\sum_{k=N}^{\infty} |f_i(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{k=N}^{\infty} |f_j(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$, falls N hinreichend groß gewählt wird (dies ist möglich, da die Reihenreste beliebig klein werden und nur endlich viele f_j zu berücksichtigen sind).

Daraus folgt insgesamt die Abschätzung $\left(\sum_{k=N}^{\infty} |f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon$; mit etwas mathematischer Kosmetik (setze statt ϵ den Wert $\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$) folgt auch wie gewünscht $\sum_{k=N}^{\infty} |f(k)|^p < \epsilon$.

Dabei wurde N nur abhängig von ϵ und unabhängig von f gewählt; Dies erfüllt Eigenschaft (2).

$\Leftarrow$.
Um die Kompaktheit von $\overline{K}$ zu zeigen, werden wir vorheriges Lemma verwenden. Es sei (f_n) eine Folge in $\overline{K}$.

Für ein fixiertes $k \in \mathbb{N}$ ist $(f_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Nach Eigenschaft (1) ist jede dieser Folgen beschränkt und besitzen somit jeweils konvergente Teilfolgen (Satz von Bolzano-Weierstraß). Damit notieren wir eine neue Indexfolge $(n')_{n\in\mathbb{N}}$:

- $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mit einer Indexfolge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_l}(1))_{l\in\mathbb{N}}$. Es sei $1' := n_1$
- $(f_{n_l}(2))_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt mit einer Indexfolge $(n_{l_m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{l_m}}(2))_{m\in\mathbb{N}}$. Es sei $2' := n_{l_2}$.

Induktiv fortgesetzt:

- Mit der bisher immer weiter eingeschränkten Indexfolge $\tilde{n}$ besitzt $(f_{\tilde{n}}(k))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit einer noch weiter eingeschränkten Indexfolge. Es sei k' das k-te Folgenglied dieser Indexfolge.

Grob beschrieben geschieht folgendes: Man wählt eine Indexfolge derart, dass die erste Folge konvergiert; Dann wählt man daraus eine Indexfolge derart, dass die zweite Folge konvergiert und so weiter. Schreibt man sich diese Indexfolgen in Tabellenform auf, so ist bildet die Diagonale dieser Tabelle unsere neue Indexfolge n'. Deshalb spricht man hier auch von einem "Diagonal-Beweis".

Aufgrund der Konstruktion existiert für jedes $k \in \mathbb{K}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_{n'}(k) =: f(k)$.

Es folgt mit Eigenschaft (2):
$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n'$ Index der oben beschriebenen Teilfolge : $\sum_{k=N_\epsilon}^{\infty} |f_{n'}(k)|^p < \epsilon$

woraus auch folgt: $\sum_{k=N_\epsilon}^{N} |f_{n'}(k)|^p < \epsilon$ für alle $N > N_\epsilon$. Mit $n' \to \infty$ folgt aus $\lim_{n'\to\infty} f_{n'}(k) = f(k)$, dass

$\sum\limits_{k=N_\epsilon}^{N} |f(k)|^p < \epsilon$ für alle $N > N_\epsilon$. Der weitere Grenzübergang $N \to \infty$ liefert $\sum\limits_{k=N_\epsilon}^{\infty} |f(k)|^p < \epsilon$.

Damit erhalten wir bereits, dass $f \in l^p$. Es verbleibt noch zu zeigen, dass $f_{n'} \to f$ bezüglich der p-Norm konvergiert.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aus mehrmaliger Verwendung der Dreiecksungleichung folgt:

$$\|f_{n'} - f\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n'}(k) - f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\epsilon-1} |f_{n'}(k) - f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=N_\epsilon}^{\infty} |f_{n'}(k) - f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{N_\epsilon-1} |f_{n'}(k) - f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=N_\epsilon}^{\infty} |f_{n'}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=N_\epsilon}^{\infty} |f(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dabei sind die letzten beiden Terme nach der vorher hergeleiteten Abschätzung jeweils kleiner als $\epsilon^{\frac{1}{p}}$. Auch der erste Term ist kleiner als $\epsilon^{\frac{1}{p}}$, wenn n' nur hinreichend groß gewählt wird. Insgesamt folgt $\|f_{n'} - f\|_p < 3\epsilon^{\frac{1}{p}}$, es konvergiert also $f_{n'} \to f$.

□

Lemma 17
Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Sei $K \subset X$. Dann gilt:

Ist K kompakt, dann ist auch $f(K)$ kompakt. Ist K relativ kompakt, dann ist auch $f(K)$ relativ kompakt.

Definition 46
Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator.

Gelte für alle beschränkten Teilmengen $B \subset X$, dass $T(B)$ relativ kompakt ist. Dann heißt die Abbildung T **kompakt**.

Zudem definieren wir $K(X, Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ kompakt}\}$ die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y.

Im Worten: T ist kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Teilmenge relativ kompakt ist.

In der Definition wird nicht gefordert, dass T beschränkt ist; Beschränktheit folgt nämlich automatisch, falls der Operator T kompakt ist.

Korollar 12
Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und sei $T : X \to Y$ ein kompakter Operator. Dann ist T linear und beschränkt.

Beweis. (*) Linearität von T ist Bestandteil der Definition der Kompaktheit von T. Für die Operatornorm gilt:

$$\|T\| = \sup_{x \in \overline{B}_X(0,1)} \|T(x)\|_Y = \sup_{y \in T(\overline{B}_X(0,1))} \|y\|_Y \leq \sup_{y \in \overline{T(\overline{B}_X(0,1))}} \|y\|_Y$$

Da die Menge $\overline{B}_X(0, 1)$ in X beschränkt ist, ist das Bild $T(\overline{B}_X(0, 1))$ relativ kompakt, somit $\overline{T(\overline{B}_X(0, 1))}$ kompakt. Die Norm $\|\cdot\|_Y$ nimmt als stetige Abbildung nach $\mathbb{R}$ auf diesem Kompaktum ein (endliches) Maximum an. So folgt aus obiger Ungleichung $\|T\| < \infty$. □

Beispiel 38
Weiter oben haben wir festgestellt, dass in endlich-dimensionalen normierten Räumen relative Kompaktheit äquivalent zur Beschränktheit ist. Falls Y endlich-dimensional ist, gilt für jedes $T \in B(X, Y)$, dass das Bild einer beschränkten Menge beschränkt und somit relativ kompakt in Y ist.

Falls also Y endlich-dimensional ist, sind alle linearen und beschränkten Operatoren aus $B(X, Y)$ kompakt (da jeder kompakte Operator auch beschränkt ist folgt $K(X,Y) = B(X,Y)$).

Lemma 18
Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

Dann ist $K(X,Y)$ ein Teilraum von $L(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ linear}\}$ (bzw. auch von $B(X,Y)$).

Seien $(W, \|\cdot\|_W), (Z, \|\cdot\|_Z)$ weitere normierter Räume und seien $F \in L(W,X)$, $T \in K(X,Y)$ und $G \in L(Y,Z)$. Dann ist $G \circ T \circ F \in K(W,Z)$.

Beweis. Wir wollen bei diesem Beweis nicht auf Details eingehen. Zu zeigen, dass $K(X,Y)$ ein Teilraum ist, ist eine mehr oder minder einfache Aufgabe. Dass $G \circ T \circ F \in K(W,Z)$ gilt, folgt aus den Kenntnissen, dass das lineare Bild einer beschränkten Menge wieder beschränkt und das lineare Bild einer relativ kompakten Menge wieder relativ kompakt ist. □

Beispiel 39
Wir greifen das Beispiel 13 auf Seite 16 nochmals auf. Solche Operatoren sind beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung relevant.

Es sei $k \in \mathcal{C}([a,b]^2)$ und $T : \begin{cases} \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b] \\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_a^b k(x,y)f(y)\ dy\right) \end{cases}$. Dabei seien alle Räume mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Linearität von T ist offensichtlich. Wir wollen nun zeigen, dass T ein kompakter Operator ist.

Dazu sei $K \subset \mathcal{C}$ beschränkt mit $\|f\|_\infty \le M \in \mathbb{R}$ für alle $f \in K$. Wir verwenden den Satz von Arzela-Ascoli um zu zeigen, dass $T(K)$ relativ kompakt ist. Die gleichmäßige Beschränktheit folgt schnell aus $|T(f)(x)| = \left|\int_a^b k(x,y)f(y)\ dy\right| \le \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |k(x,y)|\ dy \le M \cdot \int_a^b |k(x,y)|\ dy =: M_x$ für ein $x \in [a,b]$.

Für die gleichgradige Stetigkeit verwenden wir, dass k als stetige Funktion auf der kompakten Menge $[a,b]^2$ gleichmäßig stetig ist. Es gilt also:
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,y),(x',y') \in [a,b]^2 :\ \|(x,y)-(x',y')\|_2 < \delta\ \to\ |k(x,y)-k(x',y')| < \epsilon$, insbesondere gilt $|x - x_0| < \delta\ \to\ |k(x,y) - k(x_0,y)| < \epsilon$.

Sei nun $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [a,b]$ beliebig. Mit $\delta > 0$ wie oben gewählt folgt für $|x - x_0| < \delta$ und $f \in K$:
$|T(f)(x) - T(f)(x_0)| = \left|\int_a^b (k(x,y) - k(x_0,y))f(y)\ dy\right| \le M \cdot \int_a^b |k(x,y) - k(x_0,y)|\ dy \le M \cdot \int_a^b \epsilon\ dy = M(b-a)\epsilon$. Damit erhalten wir die gleichgradige Beschränktheit.

Insgesamt folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli, dass für jede beschränkte Menge K das Bild $T(K)$ relativ kompakt ist. Damit ist der Operator T kompakt.

Satz 36
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachraum. Dann ist $K(X,Y)$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraumes $(B(X,Y), \|\cdot\|)$.

Beweis. Sei $T \in \overline{K(X,Y)}$. Wir wollen zeigen, dass $T \in K(X,Y)$, also dass T kompakt ist. Dazu sei $B \subset X$ eine beschränkte Menge mit $\forall b \in B :\ \|b\| \le M$ für ein $M > 0$. $\overline{T(B)}$ ist als abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes $B(X,Y)$ vollständig. Wenn wir zeigen, dass diese Menge total beschränkt ist (also für beliebiges $\epsilon > 0$ ein endliches ϵ-Netz besitzt), folgt daraus wie gewünscht die Kompaktheit.

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Eigenschaft des Abschlusses gilt: $\exists K \in K(X,Y) :\ \|T - K\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Zudem ist $\overline{K(B)}$ kompakt. Es gibt also dafür also ein endliches $\frac{\epsilon}{2}$-Netz: $\overline{K(B)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$; insbesondere gilt $\exists y_1, \ldots, y_n \in \overline{K(B)}\ \forall z \in \overline{K(B)}\ \exists i \in \{1, \ldots, n\} :\ \|z - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dann folgt für ein beliebiges $x \in B$ und geeignet gewähltem $i \in \{1, \ldots, n\}$:
$\|T(x) - y_i\| \leq \|T(x) - K(x)\| + \|K(x) - y_i\| \leq \underbrace{\|T - K\|}_{< \frac{\epsilon}{2M}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leq M} + \underbrace{\|K(x) - y_i\|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$

Damit bilden $y_1, \ldots, y_n$ ein ϵ-Netz für die Menge $T(B)$. Ist nun $z \in \overline{T(B)}$, so gibt es eine Folge $x_n \in B$, wobei $T(x_n) \to z$ konvergiert. Dabei muss zumindest eine Teilfolge $(T(x_{n_k}))$ ganz in einer bestimmten $\frac{\epsilon}{2}$-Kugel des Netzes $B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$ enthalten sein (da es sich nur um endlich viele Kugeln handelt). Mit diesem Wissen folgt: $\|z - y_i\| = \lim\limits_{k \to \infty} \underbrace{\|T(x_{n_k}) - y_i\|}_{< \epsilon} \leq \epsilon$.

Also bilden $y_1, \ldots, y_n$ ein ϵ-Netz für die Menge $\overline{T(B)}$ (bis auf die Ungleichung $\leq$ statt $<$; dies ist für die Definition aber nicht weiter von Bedeutung).

$\square$

12 Spektrum linearer Operatoren

Zum Schluss behandeln wir einige grundlegende Definitionen und Sätze der Spektraltheorie; Da diese Theorie sehr umfangreich ist werden wir uns nun der Einfachheit halber auf Banachräume über $\mathbb{C}$ einschränken und nur auf die Spektraltheorie von kompakten Operatoren etwas näher eingehen.

Definition 47
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum über $\mathbb{C}$. Sei $T \in B(X, X)$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir notieren $T_\lambda = \lambda - T := \lambda \cdot Id_X - T$, wobei Id_X die Identität auf X bezeichne.

- λ heißt **regulärer Wert** von T, falls T_λ invertierbar und die Umkehrabbildung stetig ist.
- λ heißt **Spektralwert** von T, falls λ kein regulärer Wert von T ist.
- λ heißt **Eigenwert** von T, falls T_λ nicht injektiv ist.
- Ist λ regulärer Wert, dann heißt die Umkehrabbildung $R_\lambda := T_\lambda^{-1}$ **Resolvente** von T zu λ.
- $Res(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist regulärer Wert von } T\}$ heißt die **Resolventenmenge** von T.
- $Spec(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Spektralwert von } T\}$ heißt das **Spektrum** von T.

Man stellt leicht fest, dass jeder Eigenwert auch ein Spektralwert, aber nicht zwangsweise jeder Spektralwert ein Eigenwert ist. Nur zu einem Eigenwert gibt es dann auch einen Eigenvektor, daher ein $x \in X\backslash\{0\}$ derart, dass $T(x) = \lambda x$ gilt. Im Endlich-dimensionalen entsprechen Spektralwerte und Eigenwerte einander, weil dort Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung äquivalent sind.

Da wir X als Banachraum vorausgesetzt haben können wir ein Korollar des Satzes der offenen Abbildung anwenden. Es folgt: λ ist genau dann ein regulärer Wert, wenn T_λ bijektiv ist (die Umkehrfunktion R_λ ist dann automatisch stetig).

Lemma 19
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $T \in B(X, X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Gelte $|\lambda| > \|T\|$. Dann ist $\lambda \in Res(T)$ (λ ist regulärer Wert von T).

Insbesondere gilt: $\forall \mu \in Spec(T): \ |\mu| \leq \|T\|$ und die Resolvente $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ besitzt die Darstellung $R_\lambda(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(y)$ (vgl. Neumann-Reihe; Lineare Algebra)

Beweis. Wir zeigen Injektivität und Surjektivität von T_λ.

Injektivität.
Indirekt sei T_λ nicht injektiv. Dann $\exists x \in X,\, x \neq 0: \ T(x) = \lambda x$, woraus folgt
$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, also erhalten wir den Widerspruch $|\lambda| \leq \|T\|$.

Surjektivität.
Sei $y \in X$ beliebig. Wir konstruieren ein $x \in X$ derart, dass $T_\lambda(x) = y$. Dazu definieren wir
$x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(y)$. ($T^n$ bezeichne die n-malige Hintereinanderausführung $T \circ T \circ \cdots \circ T$; beachte: $\lambda \neq 0$, da $|\lambda| > \|T\| \geq 0$)

Dieses x ist wohldefiniert, denn die Reihe ist absolut (bezüglich Norm) konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|T^n(y)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|T\|^n \|y\| = \frac{\|y\|}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)}_{<1}^{n} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{\|y\|}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} < \infty$$

Aufgrund der Stetigkeit von T gilt:

$T(x) = T\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(y)\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^{n+1}(y) \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(y) =$

$$\lambda\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(y)}_{=x} - \frac{y}{\lambda}\right) = \lambda\left(x - \frac{y}{\lambda}\right) = \lambda x - y.$$

Damit folgt wie gewünscht $\lambda x - T(x) = T_\lambda(x) = y$. □

Satz 37
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in B(X, X)$. Es gilt:

$Res(T)$ ist offen und $Spec(T)$ ist kompakt.

Beweis. Wir zeigen, dass $Res(T)$ offen ist. Daraus folgt, dass $Spec(T) = Res(T)^C$ abgeschlossen ist. Weil $Spec(T)$ zudem nach dem vorherigen Lemma beschränkt ist, folgt dessen Kompaktheit in $\mathbb{C}$.

Es sei $\lambda_0 \in Res(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ (diese Operatornorm ist wohldefiniert, da die Resolvente nach obiger Bemerkung beschränkt ist). Wir zeigen, dass $\lambda \in Res(T)$ gilt.

Wir halten fest: $T_{\lambda_0} \circ R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} \circ T_{\lambda_0} = Id_X$. Daraus folgt:
$T_\lambda = \lambda \cdot Id_X - T = \lambda_0 \cdot Id_X - T + (\lambda - \lambda_0) \cdot Id_X = T_{\lambda_0} + T_{\lambda_0} \circ R_{\lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0) = T_{\lambda_0} \circ (Id_X + (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0})$.

Der letzte Operator $Id_X + (\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0}$ ist invertierbar; der Beweis dafür ist analog zu dem des vorherigen Lemmas. Damit folgt, dass T_λ als Hintereinanderausführung invertierbarer Funktionen wieder invertierbar und λ somit in $Res(T)$ ist. □

Definition 48
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in B(X, X)$.

- $Spec_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$
  heißt das **Punktspektrum** von T.
- $Spec_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T_\lambda \text{ ist injektiv, nicht surjektiv und } T_\lambda(X) \text{ ist dicht in } X\}$
  heißt das **kontinuierliche Spektrum** von T.
- $Spec_r(T) := Spec(T) \setminus (Spec_p(T) \cup Spec_c(T))$
  heißt das **residuelle Spektrum** von T.

Nach dieser Definition ist das Spektrum von T die disjunkte Vereinigung dieser Mengen:
$Spec(T) = Spec_p(T) \,\dot\cup\, Spec_c(T) \,\dot\cup\, Spec_r(T)$

Lemma 20
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in B(X, X)$.

Dann existiert der Limes $\rho(T) := \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Für diesen gilt weiters:

- $\rho(T) \leq \|T\|$
- $\forall \lambda \in Spec(T): \ |\lambda| \leq \rho(T)$
- $\exists \lambda_0 \in Spec(T): \ |\lambda_0| = \rho(T)$

Definition 49
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in B(X, X)$.

Der obige Limes $\rho(T) := \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ heißt der **Spektralradius** von T.

Nun widmen wir uns noch kurz der Spektraltheorie kompakter Operatoren (Theorie von Riesz-Schauder).

Falls wir mit einem konkreten Spektralwert $\lambda \neq 0$ eines Operators T arbeiten, lässt sich T_λ darstellen als $T_\lambda = \lambda Id_X - T = \lambda\left(Id_X - \frac{1}{\lambda}T\right)$. Ist der Operator kompakt, so ist auch $\frac{1}{\lambda}T$ kompakt; weiters besitzen $\lambda\left(Id_X - \frac{1}{\lambda}T\right)$ und $Id_X - \frac{1}{\lambda}T$ denselben Kern und dasselbe Bild, es gleichen sich also auch Injektivität und Surjektivität. Deshalb werden wir zunächst den Spezialfall $\lambda = 1$ betrachten und daraus Schlussfolgerungen für beliebige Werte treffen.

Lemma 21
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in B(X,X)$. Sei $V := Id_X - T$. Seien $M \subsetneq L \subset X$ abgeschlossene Teilräume mit der Eigenschaft $V(L) \subset M$. Dann gilt: $\exists a \in L\backslash M, \|a\| \leq 1\ \forall x \in M:\ \|T(x) - T(a)\| \geq \frac{1}{2}$

Beweis. Sei $b \in L\backslash M$. Es folgt $b \neq 0$ und $\alpha := d(b, M) = \inf\limits_{m\in M} \|b - m\| > 0$.
Also $\exists y \in M : \alpha \leq \|b - y\| \leq 2\alpha$. Mit $a := \frac{1}{\|b-y\|}(b - y)$ gilt $\|a\| = 1$ und
$\forall z \in M:\ a - z = \frac{1}{\|b-y\|}(b - (\underbrace{y + \|b - y\|z}_{\in M}))$, folglich $\|a - z\| \geq \frac{\alpha}{\|b-y\|} \geq \frac{1}{2}$.

Sei nun $x \in M$. Es folgt $\|T(a) - T(x)\| = \|a - V(a) - x + V(x)\| = \|a - (\underbrace{x + V(a) - V(x)}_{\in M})\| \geq \frac{1}{2}$. □

Satz 38
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $T \in K(X,X)$ und $V := Id_X - T$. Dann gilt:

(1) $ker(V)$ ist endlich-dimensional.

(2) $Im(V)$ ist abgeschlossen.

(3) Die Dimension des Faktorraumes $X/_{Im(V)}$ ist endlich ($Im(V)$ hat endliche Co-Dimension in X).

(4) Falls $ker(V) = \{0\}$, so ist $V : X \to Im(V)$ linearer und beschränkter Isomorphismus (speziell ist dessen Umkehrfunktion stetig).

Beweis. (1).
$ker(V)$ ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung V abgeschlossen. Für ein $x \in ker(V)$ gilt $V(x) = x - T(x) = 0$, also $T(x) = x$.

Sei nun $B := \overline{B}_{ker(V)}(0,1) = \{x \in ker(V) \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel von $ker(V)$. Diese Menge ist beschränkt und abgeschlossen. Nach vorheriger Überlegung gilt, dass $T(B) = B$; da T ein kompakter Operator ist, ist B relativ kompakt; da B bereits abgeschlossen ist, ist B kompakt. Aus Satz 33 auf Seite 51 folgt, dass $ker(V)$ endlich-dimensional ist.

(2).
Indirekt sei $Im(V)$ nicht abgeschlossen. Dann gibt es eine Folge $(y_n) = (V(x_n))$ in $Im(V)$ (mit $x_n \in X$), wobei $y_n = V(x_n) \to y \notin Im(V)$ gilt. Da $y \neq 0$ können wir O.B.d.A. annehmen, dass $\forall n \in \mathbb{N}:\ y_n \neq 0$, also $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \notin ker(V)$ gilt. Da $ker(V)$ abgeschlossen ist, gilt $\alpha_n := d(x_n, ker(V)) > 0$. Dann $\exists u_n:\ \alpha_n \leq \underbrace{\|x_n - u_n\|}_{=:\Theta_n} \leq 2\alpha_n$.

Unser nächster Zwischenschritt ist, zu zeigen, dass $\Theta_n \to \infty$. Nehmen wir indirekt an, dass $(x_n - u_n)$ eine beschränkte Teilfolge $(x_{n'} - u_{n'})$ besitzt. Dann ist die Menge $\{x_{n'} - u_{n'} \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Das Bild $T(\{x_{n'} - u_{n'} \mid n \in \mathbb{N}\})$ ist relativ kompakt, also besitzt die Folge $(T(x_{n'} - u_{n'}))$ eine konvergente Teilfolge $(T(x_{n''} - u_{n''})) \to x' \in X$. Somit gilt $x_{n''} - u_{n''} = Id_X(x_{n''} - u_{n''}) = (V + T)(x_{n''} - u_{n''}) = V(x_{n''} - u_{n''}) + T(x_{n''} - u_{n''}) \to y + x' =: x \in X$. Darus folgt jedoch $V(x_{n''} - u_{n''}) \to V(x) = y \in Im(V)$ im Widerspruch zu $y \notin Im(V)$.

Da also $(x_n - u_n)$ und infolgedessen auch (Θ_n) keine beschränkte Teilfolge besitzen, muss $\Theta_n \to \infty$ gelten. Mit $v_n := \frac{1}{\|x_n - u_n\|}(x_n - u_n) = \frac{1}{\Theta_n}(x_n - u_n)$ erhalten wir eine Folge normierter Elemente ($\forall n \in \mathbb{N}: \|v_n\| = 1$) mit $V(v_n) = \underbrace{\frac{1}{\Theta_n}}_{\to 0} \underbrace{V(x_n)}_{\to y} \to 0$; Da die Folge (v_n) insbesondere beschränkt ist gilt (mit gleichem Argument wie zuvor), dass die Folge $(T(v_n))$ eine konvergente Teilfolge $(T(v_{n'}))$ mit $T(v_{n'}) \to v \in X$ besitzt.

Es folgt $v_{n'} = \underbrace{V(v_{n'})}_{\to 0} + \underbrace{T(v_{n'})}_{\to v} \to v$. Da also $0 = \lim_{n\to\infty} V(v_n) = V(v)$ ist $v \in ker(V)$. Somit ist $u_n + \Theta_n v \in ker(V)$ und es gilt $\alpha_n \leq \|x_n - (u_n + \Theta_n v)\| = \Theta_n \| \underbrace{\frac{x_n - u_n}{\Theta_n}}_{=v_n} - v\| = \Theta_n \|v_n - v\| \leq 2\alpha_n \|v_n - v\|$.

Daraus folgt schlussendlich der Widerspruch $\forall n \in \mathbb{N}: \|v_n - v\| \geq \frac{1}{2}$, obwohl $v_n \to v$.

(3).
Indirekt. Sei die Co-Dimension von $Im(v)$ unendlich. Wir setzen $L_0 := Im(V)$ und konstruieren induktiv: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in X \backslash L_{n-1}$ beliebig gewählt und $L_n := \mathcal{L}(Im(V), a_1, \ldots, a_n)$. Diese induktive Konstruktion der Folge (a_n) ist möglich, denn aus der unendlichen Co-Dimension folgt, dass $X \backslash L_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Menge $L_0 = Im(V)$ ist nach dem vorherigen Punkt des Satzes abgeschlossen; Nach dem Satz 11 auf Seite 17 sind auch alle weiteren L_n abgeschlossen.

Nun konstruieren wir nochmals eine Folge. Für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}$ gilt $L_n \subsetneq L_{n-1}$, zudem $V(L_n) \subset V(X) \subset L_{n-1}$. Damit sind die Voraussetzungen des vorherigen Lemmas erfüllt. Dieses sagt uns: $\exists b_n \in L_n \backslash L_{n-1}, \|b_n\| \leq 1 \; \forall x \in L_{n-1}: \|T(x) - T(b_n)\| \geq \frac{1}{2}$.

Es folgt für die Folge $(T(b_n))$ nun einerseits, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzen muss, da die Folge (b_n) mit $\|b_n\| \leq 1$ beschränkt ist (siehe obige Argumentation). Andererseits gilt für beliebige $m \neq n \in \mathbb{N}$: $\|T(b_n) - T(b_m)\| \geq \frac{1}{2}$; Die Folge kann also unmöglich eine konvergente Teilfolge besitzen. Widerspruch!

(4).
Dass V linear und beschränkt ist, ist klar, da $V = Id_X - T$ mit den linearen und beschränkten Operatoren Id_X und T ist. Bijektivität ist auch klar; Injektivität gilt nach Voraussetzung und Surjektivität ist durch die Einschränkung der Zielmenge gegeben. Da wir in einem Banachraum X arbeiten sind die Voraussetzungen des Satzes der offenen Abbildung erfüllt; Nach Korollar 9 auf Seite 31 ist auch die Umkehrfunktion beschränkt. □

Satz 39
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $T \in K(X,X)$ und $V := I - T$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei weiters $N_k := ker(V^k)$ und $R_k := Im(V^k)$. Es gilt:

(1) $\forall k \in \mathbb{N}: N_k$ ist endlich-dimensionaler Unterraum und $N_k \subset N_{k+1}$
$\forall m \in \mathbb{N}: R_m$ ist abgeschlossener Unterraum, besitzt endliche Co-Dimension und $R_m \supset R_{m+1}$

(2) $\exists k_0 \in \mathbb{N}: (\forall k < k_0 : N_k \subsetneq N_{k+1})$ und $(\forall k \geq k_0: N_k = N_{k+1})$
$\exists m_0 \in \mathbb{N}: (\forall m < m_0 : R_m \supsetneq R_{m+1})$ und $(\forall m \geq m_0: R_m = R_{m+1})$
Dabei gilt $k_0 = m_0$.
Im Worten: Die Mengenfolgen N_k und R_k sind aufsteigend bezüglich Mengeninklusion. Sie nehmen bis zu einem gewissen Index $k_0 = m_0$ echt zu bzw. ab, und bleiben dann für alle weiteren Indizes gleich (sie werden stationär).

(3) $\exists!\, r \in B(X, R_{k_0}), n \in B(X, N_{k_0}) \; \forall x \in X: x = r(x) + n(x)$ (Es besteht speziell die direkte Summe $X = N_{k_0} \bigoplus R_{k_0}$)

(4) $V|_{R_{k_0}} : R_{k_0} \to R_{k_0}$ ist Isomorphismus.

Beweis. (1).
Wir greifen auf ein paar Mittel der Algebra zurück (für Details siehe also Algebra Vorlesung/Übung). Es ist $(End(X), +, \circ)$ ein Ring mit Eins ($End(X)$ bezeichnet die Menge aller additiven Endomorphismen auf X und $\circ$ bezeichnet die Hintereinanderausführung). Da $Id_X \circ T = T \circ Id_X$ gilt, lässt sich der binomische Lehrsatz anwenden:
Für fixiertes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $V^k = (Id_X - T)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i T^i = Id_X - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(-1)^{i+1} T^i}_{=:T_k}$.

T_k ist dabei als Linearkombination von Hintereinanderausführungen des kompakten Operators T wieder kompakt; Auf diesen lässt sich also wieder unser vorheriger Satz anwenden, welcher uns liefert, dass N_k endlich-dimensionaler Unterraum und R_k abgeschlossener Unterraum mit endlicher Co-Dimension ist.

Die beschriebenen Mengeninklusionen sind klar:
Falls $x \in N_k$, so ist $V^k(x) = 0$, also auch $V(V^k(x)) = V^{k+1}(x) = 0$ und $x \in N_{k+1}$.
Falls $y \in R_{m+1}$, so gibt es ein $x \in X$, dass $V^{m+1}(x) = V^m(\underbrace{V(x)}_{\in X}) = y$, also $y \in R_m$

(2).
Wir zeigen zunächst: $\exists k \in \mathbb{N}: \; N_k = N_{k+1}$. Indirekt gelte: $\forall k \in \mathbb{N}: \; N_k \subsetneq N_{k+1}$. Nun verfolgen wir diesselbe Idee wie im vorherigen Satz im Punkt (3). Die Kerne N_k sind abgeschlossene Teilräume. Da die Voraussetzungen des obigem Lemmas erfüllt sind, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $b_k \in N_{k+1} \setminus N_k$ mit $\|b_k\| \leq 1$ derart, dass $\forall x \in N_k: \; \|T(x) - T(b_k)\| \geq \frac{1}{2}$, folglich gilt für $k \neq l$, dass $\|T(b_k) - T(b_l)\| \geq \frac{1}{2}$. Die Folge $(T(b_k))$ kann also unmöglich eine konvergente Teilfolge besitzen, obwohl sie wegen der Kompaktheit von T sehr wohl eine besitzen müsste. Widerspruch!

Weiters zeigen wir: $N_k = N_{k+1} \to N_{k+1} = N_{k+2}$. $N_{k+1} \subset N_{k+2}$ wissen wir bereits. Sei also $x \in N_{k+2}$. Dann ist $V^{k+2}(x) = V^{k+1}(\underbrace{V(x)}_{\in X}) = 0 \;\Leftrightarrow\; V^k(V(x)) = V^{k+1}(x) = 0$. Damit gilt $N_{k+2} \subset N_{k+1}$. Falls die Folge N_k also einmal stationär wird, bleibt sie das für immer.

Wählen wir nun $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$ erfüllt dieser Index genau die geforderte Eigenschaft. Völlig analog lässt sich die zweite Aussage für R_m beweisen.

Für die Gleichheit $k_0 = m_0$ zeigen wir nur $k_0 \geq m_0$. Die verkehrte Ungleichung ist ähnlich zu zeigen. Wir halten zunächst fest: Es gilt $N_{k_0} \cap R_{k_0} = \{0\}$. Denn sei $y \in N_{k_0} \cap R_{k_0}$, dann gilt $V^{k_0}(y) = 0$ und mit geeignetem $x \in X$ $V^{k_0}(x) = y$. Dann folgt $0 = V^{2k_0}(x) = V^{k_0}(x) = y$, also beinhaltet $N_{k_0} \cap R_{k_0}$ nur den Nullvektor.

Indirekt angenommen sei $k_0 < m_0$. Dann ist $R_{k_0} \supsetneq R_{m_0}$. Sei $z \in R_{m_0-1} \setminus R_{m_0}$. Es ist $V(z) \in R_{m_0} = R_{m_0+1}$, also gibt es ein $x \in R_{m_0}$ mit $V(x) = V(z)$. Dann ist $z - x \in N_1 \subset N_{k_0}$ und gleichzeitig $z - x \in R_{k_0}$. Aus der anfänglichen Überlegung folgt $z - x = 0$, also $x = z$. Die führt zum Widerspruch $x \in R_{m_0}$ und $z \notin R_{m_0}$.

(3).
Sei $x \in X$ beliebig.Es ist $V^{k_0}(x) = R_{k_0} = R_{2k_0} = V^{k_0}(R_{k_0})$. Also $\exists y \in R_{k_0}: \; V^k(x) = V^k(y)$, folglich $x - y \in N_{k_0}$. Damit lässt sich x zerlegen in $x = \underbrace{y}_{=:r(x) \in R_{k_0}} + \underbrace{(x - y)}_{=:n(x) \in N_{k_0}}$. Damit ist die Existenz einer Zerlegung bewiesen. Eindeutigkeit folgt einfach aus der vorher behandelten Gleichung $N_{k_0} \cap R_{k_0}$, Linearität folgt dann einfach aus der Eindeutigkeit. Beschränktheit folgt aus den Kenntnissen, dass N_{k_0} endliche Dimension und R_{k_0} endliche Co-Dimension besitzen.

(4).
Mit $N_{k_0} \cap R_{k_0} = \{0\}$ folgt, dass $ker(V|_{R_{k_0}}) = \{0\}$, also Injektivität. Surjektivität ist klar. Die Umkehr-

funktion ist wieder wegen des Korollars 9 auf Seite 31 beschränkt (Satz der offenen Abbildung). □

Korollar 13
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $T \in K(X, X)$ und $V := I - T$. Es gilt:

Wenn V injektiv ist, ist V auch surjektiv.

Beweis. Ist V injektiv, so ist $N_1 = \{0\}$, also ist die Mengenfolge N_k von Anfang an stationär ($k_0 = 1$). Es folgt $X = R_1 \bigoplus N_1 = R_1$, also $Im(V) = X$ (Surjektivität). □

Korollar 14
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum. Sei $T \in K(X, X)$ kompakter Operator.

Dann ist jeder Spektralwert $\lambda \in spec(T), \lambda \neq 0$ ein Eigenwert.

Beweis. Sei $\lambda \neq 0$ ein Spektralwert. Nach dem Satz der offenen Abbildung (abermals Korollar 9, Seite 31) ist für jede bijektive, lineare beschränkte Funktion auch die Umkehrabbildung stetig. Deshalb muss gelten, dass $T_\lambda = \lambda(Id_X - \frac{1}{\lambda}T)$ nicht injektiv oder nicht surjektiv ist. Aus dem vorherigen Korollar folgt (mit $\frac{1}{\lambda}T$ als kompakten Operator), dass falls $\frac{1}{\lambda}T_\lambda$ nicht surjektiv ist, diese Abbildung auch nicht injektiv sein kann; selbiges gilt dann auch für T_λ. In jedem Fall ist λ also ein Eigenwert. □

Satz 40 (Spektralsatz für kompakte Operatoren)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum und $T \in K(X, X)$. Dann gilt:

(1) $spec(T)$ ist höchstens abzählbar. Falls $spec(T)$ nicht endlich ist (es gibt eine Darstellung $Spec(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ und $0 \in Spec(T)$.

(2) Ist X unendlich-dimensional, so ist $0 \in Spec(T)$.

(3) Ist $\lambda \in Spec(T), \lambda \neq 0$, so gibt es eine eindeutige Zerlegung $X = R(\lambda) \bigoplus N(\lambda)$, wobei $R(\lambda), N(\lambda) \subset X$ Teilräume mit folgenden Eigenschaften sind:
  (i) $R(\lambda)$ ist abgeschlossen und $N(\lambda)$ ist endlich-dimensional.
  (ii) $T_\lambda|_{R(\lambda)} : R(\lambda) \to R(\lambda)$ ist ein Isomorphismus.
  (iii) $T(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$ und $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k :\ T_\lambda^n(N(\lambda)) = \{0\}$.

(4) $ker(T_\lambda) \subset N(\lambda)$.

(5) Sind $\lambda, \mu \in spec(T)\backslash\{0\}$, $\lambda \neq \mu$, dann gilt $N(\mu) \subset R(\lambda)$.

Beweis. (1).
Wir zeigen: Für beliebiges $\epsilon > 0$ ist $U_\epsilon := \{\lambda \in spec(T) \mid |\lambda| > \epsilon\}$ endlich. Indirekt sei diese Menge nicht endlich. Dann gibt es eine Folge von paarweise verschiedenen Spektralwerten (λ_n), die alle ungleich Null und somit (nach obigem Korollar) Eigenwerte sind. Zu jedem Eigenwert λ_n gibt es einen Eigenvektor $x_n \in X$; wie die Eigenwerte müssen auch die Eigenvektoren paarweise verschieden sein.

Die Menge dieser Eigenvektoren $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig (ohne Beweis). Nun setzen wir für alle $n \in \mathbb{N}$: $M_n := \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$. Diese Mengen sind agbeschlossen, offensichtlich ist auch $M_n \subsetneq M_{n+1}$, sowie $T(M_n) = M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für ein fixiertes $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sei nun $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in M_n$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$T_{\lambda_n}(x) = \lambda_n \underbrace{(Id_X(x) - \frac{1}{\lambda_n}T(x))}_{=:V_{\lambda_n}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in M_{n-1}.$$

Es gilt also $V_{\lambda_n}(M_n) \subset M_{n-1}$. Insgesamt sind wieder die Voraussetzungen des Lemmas 21 auf Seite 59 erfüllt und wir leiten einen Widerspruch her wie schon beim Beweis von Satz 38 (Seite 59) im Punkt (3);

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n \in M_{n+1} \backslash M_n, \|u_n\| \leq 1\ \forall x \in M_n:\ \|\frac{1}{\lambda_n}T(x) - \frac{1}{\lambda_n}T(u_n)\| = \frac{1}{\lambda_n}\|T(x) - T(u_n)\| \geq \frac{1}{2}$, dabei gilt zusätzlich mit $|\lambda_n| > \epsilon$ auch $\|T(x) - T(u_n)\| \geq \frac{\epsilon}{2}$. Gleich wie oben erhalten wir den Widerspruch, dass $(T(u_n))$ wegen Kompaktheit von T eine konvergente Teilfolge haben soll, was wegen der hergeleiteten Ungleichung nicht möglich ist.

Nun gilt für die Menge aller Spetralwerte ungleich Null: $spec(T) \backslash \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$. Dies ist eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und somit (auch wenn 0 hinzugefüght wird) höchstens abzählbar. Falls $spec(T)$ unendlich ist, so ist diese Menge beschränkt (mit $\|T\|$) und besitzt somit zumindest einen Häufungspunkt. Für diesen kommt kein Wert außer 0 infrage, denn wäre $\mu \neq 0$ ein Häufungspunkt, so müsste die Menge $B(\mu, |\frac{1}{\mu}|) \cap Spec(T) \subset U_{|\frac{1}{\mu}|}$ unendlich sein, was nicht der Fall ist. Somit muss jede Folge an Eigenwerten von T gegen 0 konvergieren. Da $Spec(T)$ kompakt ist (wurde in einem Satz oben behandelt), muss auch der Grenzwert 0 im Spektrum enthalten sein.

(2).
Sei 0 regulärer Wert von T. Dann ist T bijektiv. Nach dem Satz der offenen Abbildung gilt für ein geeignetes $\delta > 0$: $T(\overline{B}_X(0,1)) \supset \overline{B}_X(0,\delta)$. Da T relativ kompakt und $\overline{B}_X(0,1)$ beschränkt ist, ist $\overline{T(\overline{B}_X(0,1))}$ kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist auch $\delta \cdot \overline{B}_X(0,1) = \overline{B}_X(0,\delta)$, somit auch die abgeschlossene Einheitskugel kompakt. Nach einem obigen Satz folgt daraus die endliche Dimension von X.

(3).
Wir erhalten die Existenz einer Zerlegung durch das Anwenden des obigen Satzes 39 (Seite 60) auf $V_\lambda = Id_X - \frac{1}{\lambda}T$; Die entprechenden Eigenschaften (i), (ii), (iii) sind mehr oder weniger leicht nachzuvollziehen.

Wir zeigen noch, dass die Zerlegung $X = R(\lambda) \bigoplus N(\lambda)$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii) eindeutig bestimmt ist. Seien dazu die zwei Zerlegungen $X = R(\lambda) \bigoplus N(\lambda) = R'(\lambda) \bigoplus N'(\lambda)$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Dabei seien k und k' derart, dass $\forall n \geq k:\ T_\lambda^n(N(\lambda)) = \{0\}$ bzw. $\forall n' \geq k:\ T_\lambda^{n'}(N'(\lambda)) = \{0\}$ gilt.

Sei $x \in N'(\lambda)$ beliebig. Dieses besitzt nun eine Zerlegung $x = \underbrace{y}_{\in R(\lambda)} + \underbrace{z}_{\in N(\lambda)}$. Für $n \geq k, k'$ gilt $0 = T_\lambda^n(x) = T_\lambda^n(y) + \underbrace{T_\lambda^n(z)}_{=0 \text{ nach (iii)}} = T_\lambda^n(y)$. Es ist $y \in R(\lambda)$; nach Annahme (ii) ist $T_\lambda|_{R(\lambda)}$ ein Isomorphismus, also auch $T_\lambda|_{R(\lambda)}^n$. Dann gilt wegen $T_\lambda^n(y) = 0 = T_\lambda^n(0)$, dass $y = 0$. Es folgt $x = z \in N(\lambda)$ und insgesamt $N'(\lambda) \subset N(\lambda)$. Das Vertauschen der Rollen liefert die Gleichheit $N'(\lambda) = N(\lambda)$.

Sei $x \in R'(\lambda)$ beliebig. Es gibt wieder eine Zerlegung $x = \underbrace{y}_{\in R(\lambda)} + \underbrace{z}_{\in N(\lambda)}$. Es gilt $T_\lambda^k(x) \overset{(iii)}{=} T_\lambda^k(y) \in R(\lambda)$. Aus Isomorphie des Punktes (ii) folgt $R'(\lambda) = T_\lambda^k(R'(\lambda))$, also insgesamt wieder $R'(\lambda) \subset R(\lambda)$ und durch Rollentausch $R'(\lambda) = R(\lambda)$.

(4).
Die Zerlegung ist wie im obigen Punkt festgestellt durch Satz 39 (Seite 60) gegeben. Mit der Zerlegung lässt sich dieser Punkt leicht nachweisen.

(5).
Sei $x \in N(\mu)$. Es gibt eine Zerlegung $x = \underbrace{u}_{\in N(\lambda)} + \underbrace{v}_{\in R(\lambda)}$. Es sei $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $T_\mu^k(N(\lambda)) = \{0\}$.

Wegen der Darstellung $T_\mu = T_\lambda + (\mu - \lambda)Id_X$ gilt: $T_\mu(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$ und $T_\mu(R(\lambda)) \subset R(\lambda)$. Daraus folgt

$0 = T_\mu^k(x) = \underbrace{T_\mu^k(u)}_{\in N(\lambda)} + \underbrace{T_\mu^k(v)}_{\in R(\lambda)}$.

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von $R(\lambda) \bigoplus N(\lambda)$ gilt $T_\mu^k(u) = T_\mu^k(v) = 0$. Es folgt weiters, dass $u = x - v \in N(\lambda) \cap N(\mu)$.

Der binomische Lehrsatz liefert mit $\alpha := \mu - \lambda$ folgende Darstellung: $T_\mu^k = \alpha^k Id_X + \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{k-i} T_\lambda^i$. Damit erhalten wir $0 = T_\mu^k(u) = \alpha^k u + \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{k-i} T_\lambda^i(u)$. Nun wenden wir auf beiden Seiten T_λ^{k-1} an. Dies liefert uns: $0 = \alpha^k T_\lambda^{k-1}(u) + \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \underbrace{T_\lambda^{k+i-1}(u)}_{=0} = \alpha^k T_\lambda^{k-1}(u)$.

Damit erhalten wir $T_\lambda^{k-1}(u) = 0$. Induktives Anwenden der oben beschriebenen Methode liefert uns $u = 0$. Damit folgt schließlich $x = v \in R(\lambda)$ und insgesamt $N(\mu) \subset R(\lambda)$.

$\square$